1. 线性赋范空间

线性空间：E是非空集合. (向量空间)

(1) 定义加法. $\forall x,y\in E$, 均对应E中一元素称为x与y的和. 记作 $x+y$

(2). 对E中任一元素x和任一实数λ, 均对应E中一元素, 称x与λ数乘. λx.

(3) 满足以下运算规律.

(a) $x+y=y+x$.

(b) $x+(y+z)=(x+y)+z$.

(c) E有且唯一零元素0. 有 $x+0=x$. 且 $\forall x\in E$. 存在唯一负元素 $-x\in E$ 有 $x+(-x)=0$.

(d) $\lambda(\mu x)=(\lambda\mu)x$.

(e) $1\cdot x=x$　$0\cdot x=0$.

(f) $\lambda(x+y)=\lambda x+\lambda y$

(g) $(\lambda+\mu)x=\lambda x+\mu x$

E为线性空间. 元素为点.

空间是一种集合.

线性空间同构:

X和 $\tilde{X}$ 两个线性空间. X, $\tilde{X}$ 存在一一对应P

$\tilde{x}=P(x)$ 一一对应. 使得对任意 $x,y\in X$, (任意λ)

均有

$$\begin{cases} P(x+y)=P(x)+P(y) \\ P(\lambda x)=\lambda P(x). \end{cases}$$

则 X和 $\tilde{X}$ (线性)同构. P: 同构映射.

子空间:

• L是线性空间E子集. 对 $\forall x,y\in L$ 及任意λ, μ 均有 $\lambda x+\mu y\in L$. L是E子空间. 且是线性空间(包含零元素)、自闭性.

• E为线性空间, L_1, L_2 E中两个子空间. E中任一元素表示为 $x=x_1+x_2$. 且 $x_1\in L_1$, $x_2\in L_2$. 则E为 L_1, L_2 直和. 记作 $E=L_1\oplus L_2$. L_1, L_2 互补子空间.

充要条件. $L_1\cap L_2=0$.

凸集:

M是E(线性空间)一子集合. 对任意 $x,y\in M$ 及 $\lambda+\mu=1$. ($\lambda\geq0, \mu\geq0$)

均有 $\lambda x+\mu y\in M$.

M是E中凸集.

距离空间: X是非空集合.

X中任意两个元素x, y, 均有一个实数与之对应 $d(x,y)$.

有

(1) 非负性　$d(x,y)\geq0$ 且 $d(x,y)=0$ 充要条件 $x=y$.

(2) 对称性　$d(x,y)=d(y,x)$

(3) 三角不等式　$d(x,y)\leq d(x,z)+d(y,z)$　可以是范数

欧氏空间: 定义了距离的向量空间

无限维空间距离: $[a,b]$ 连续正数全体. 任两点距离

$$d(x,y)=\max_{a\leq t\leq b}|x(t)-y(t)|$$

极限: $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是距离空间 (X,d) 元素序列. 若 (x_n) 有x.

满足 $\lim_{n\to\infty}d(x_n,x)=0$. $\{x_n\}$ 收敛序列. x为极限.

若 $\{x_n\}$ 有极限, 则极限唯一.

从距离定义 球形邻域, 引申出开集 聚点. 闭包

连续映射: X, Y 距离空间. d_X, d_Y 距离. $T: X\to Y$　令 $x_0\in X$, 对任意 $\varepsilon>0$,

存在 $\delta>0$. 使当 $d_X(x,x_0)<\delta$ 时. 有 $d_Y(Tx,Tx_0)<\varepsilon$.

则T在 x_0 连续.　$Y=R$: T为连续函数 (特例)

同胚映射: X, Y距离空间 $T: X\to Y$. 令 $x_0\in X$.

若T是 $X\to Y$ 一一映射, T, T^{-1} 连续. T为 X到Y同胚映射.

若 $X\to Y$ 存在同胚映射, X, Y为拓扑映射.

完备距离空间:

(1) 点列 $\{x_n\}\subset X$, 满足 $\lim_{n,m\to\infty}d(x_n,x_m)=0$. 即任取 $\varepsilon>0$, 存在正整数 N, 当 $n,m>N$ 时, 有 $d(x_n,x_m)<\varepsilon$. 则 $\{x_n\}$ 为基本列 (柯西列)

(2). 每一基本列收敛, X为完备距离空间　(还在其中)

拓扑空间:

非空集合X. 一些子集 τ 定义为拓扑. 满足以下条件.

1) X与 ϕ 属于 τ

2). τ 任意多并仍属于 τ

3). τ 任何交属于 τ

τ 是X拓扑. "对" $(\;\;)$ 为拓

拓扑空间子空间:

$(X,\mathcal{T}),(Y,\mathcal{T}_1)$ 两个拓扑. $(Y,\mathcal{T}_1)$ 称为 $(X,\mathcal{T})$ 子空间 当且仅当:

1) $Y\subset X$

2) $\mathcal{T}_1$ 开集 精确是 Y与X的开集的交.

记作 $(Y,\mathcal{T}_1)\subset(X,\mathcal{T})$.

拓扑强弱: $(X,\mathcal{T}),(Y,\mathcal{T}_1)$ 相同基础集合X 若 所有$\mathcal{T}_1$中开集也是 $\mathcal{T}$ 开集. 则 $\mathcal{T}_1\subset\mathcal{T}$, $\mathcal{T}$ 比 $\mathcal{T}_1$ 强.

线性赋范空间:

E是线性空间, E中任一X, 对应一实数, 记为 $\|X\|$.

满足:

(i) $\|X\|\ge 0$, 当且仅当 $X=0$ 时 $\|X\|=0$

(ii) λ为实数 $\|\lambda X\|=|\lambda|\,\|X\|$

(iii) $\|X+Y\|\le\|X\|+\|Y\|$ $\forall X,Y\in E$

$\|X\|$为X范数. E为按 $\|\cdot\|$ 线性赋范空间 $\|X+Y\|$范数 取决于加法

范数等价 $\|\cdot\|_{(1)}$ $\|\cdot\|_{(2)}$ 两种. $\exists\alpha>0,\beta>0$ 使 $\boxed{\forall X\in E}$ 有

$\alpha\|X\|_{(1)}\le\|X\|_{(2)}\le\beta\|X\|_{(1)}$.

两种范数等价 $\|\cdot\|_{(1)}\sim\|\cdot\|_{(2)}$

线性赋范等距同构,等价

$X,\tilde X$ 均为线性赋范空间. $\|\cdot\|_X$ $\|\cdot\|_{\tilde X}$.

若有线性同构映射 φ: $\tilde X=\varphi(X)$. $X\in X$ $\tilde X\in\tilde X$

还满足: $\|\varphi(X)\|_{\tilde X}=\|X\|_X$.

称 $X,\tilde X$ 等距同构,等价的.

目前 等距同构 视为等同空间.

巴拿赫空间:

基本列(Cauchy列) X线性赋范空间 $\{X_n\}$为无穷序列

任给 $\varepsilon>0$. 总存在N, 当 $n>N$ 时, 对任意自然数p

均有 $\|X_{n+p}-X_n\|<\varepsilon$.

则 $\{X_n\}$是X中基本列.

任何收敛列为基本列, 基本列不一定收敛.

Banach空间: 任何基本列 收敛 收敛于X元素. X为完全

线性赋范空间.

任一有限维线性赋范空间均为Banach空间.

任一线性赋范空间 有限维子空间 闭的.

线性赋范空间 - 乘积空间.

X_1,X_2 线性赋范空间. 有序对 (x_1,x_2) $x_1\in X_1$ $x_2\in X_2$ 全体记为 $X_1\times X_2$.

定义 $(x_1,x_2)+(y_1,y_2)=(x_1+y_1,x_2+y_2)$ $\lambda(x_1,x_2)=(\lambda x_1,\lambda x_2)$.

范数 $\|(x_1,x_2)\|=\|x_1\|+\|x_2\|$.

则 $X_1\times X_2$ 是线性赋范空间, X_1,X_2 的乘积空间

巴拿赫空间. 证明完备性

1) 任取点列 $\{x_n\}$ $\|x_n-x_m\|<\varepsilon$ 在X中具体化. 构造出x.

2) 证明 $x\in X$. 且 $\|x_n-x_m\|\to 0$.

L^p空间: p次可积 ~~L^p范数: 向量各元素绝对值p次方求和再开p次方~~

内积空间:

E为实线性空间. E中任两元素x,y, 均有一实数与之对应. (x,y) 满足:

(i) $(x,x)\ge 0$, 当且仅当 $x=0$. $(x,x)=0$

(ii) $(x,y)=(y,x)$.

(iii) $(\lambda x,y)=\lambda(x,y)$

(iv) $(x+y,z)=(x,z)+(y,z)$

(x,y)为内积, E为内积空间

内积不等式(施瓦茨不等式): $|(x,y)|\le\sqrt{(x,x)}\sqrt{(y,y)}$ $\forall x,y\in X$.

X为内积空间 当且仅当 $x=\lambda y$ 或 x,y 有一个零元素等号成立.

巴拿赫空间

① R^n空间: n维向量空间.

加法 $(a_1+b_1,a_2+b_2,\cdots a_n+b_n)$ 为a+b的和.

数乘 $(ka_1,ka_2\cdots ka_n)$.

对加法 数乘封闭.

范数: $\|X\|_p=\left(\sum_{i=1}^n|\xi_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$

② $L^p[a,b]$空间, p次幂可积函数空间.

加法 $f(x)+g(x)$.

数乘 $\lambda f(x)$.

范数: $\|x(t)\|_p=\left[\int_a^b|x(t)|^p dt\right]^{\frac{1}{p}}$.

③ l^p空间 p次方可求和空间 $\sum_{i=1}^\infty|\xi_i|^p<\infty$ 可求和级数.

加法 $(\xi_1+\eta_1,\xi_2+\eta_2,\cdots)$

数乘 $(\lambda\xi_1,\lambda\xi_2\cdots)$

范数 $\|x\|=\left(\sum_{k=1}^\infty|\xi_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}$.

④ l^∞空间 有界数列空间.

加法 $(\xi_1+\eta_1, \xi_2+\eta_2, \cdots)$

数乘 $(\lambda\xi_1, \lambda\xi_2, \cdots)$

范数 $\|x\|=\sup_{1\le p<\infty}|\xi_i|^p$

⑥ $C[a,b]$. $[a,b]$上连续函数全体.

加法 $f(x)+g(x)$

数乘 $\lambda f(x)$

范数 $\|x(t)\|=\max_{a\le t\le b}|x(t)|$.

内积空间定理 X是内积空间 $\|x\|=\sqrt{(x,x)}$ 内积导出范数.

此时X是线性赋范空间 □

此范数下完备内积空间为希尔伯特空间.H

内积空间连续性

$\{x_n\}\{y_n\}$ x,y.内积空间元素. $\|x\|=\sqrt{(x,x)}$范数.

$x_n\to x, y_n\to y$. 有 $(x_n,y_n)\to(x,y)$

最佳逼近

X为距离空间 B是X一个集合. $x\in X\setminus B$. $d(x,B)$为x到B距离 有

$d(x,B)=\inf_{y\in B}d(x,y)$.

若B存在$\hat{x}$,使 $d(x,\hat{x})=d(x,B)$ $\hat{x}\in B$是$x\in X$在B中最佳逼近.

正交:

H为希尔伯特空间. 在H空间内 $x,y\in H$. 且 $(x,y)=0$. x,y正交.

S是H子集. 元素$x\in H$. 与S中任一元素正交. x与集合S正交 $x\perp S$.

定理1. B是H闭凸子集. $x\in H\setminus B$. 存在唯一$\hat{x}\in B$. 使得

$\|x-\hat{x}\|=\inf_{y\in B}\|x-y\|$.

定理2. 若$x\perp y$.则 $\|x+y\|^2=\|x\|^2+\|y\|^2$.

设L是H闭子空间. $x\in H\setminus L$. 则$\hat{x}$是x在L中的最佳逼近元充要条件是 $(x-\hat{x})\perp L$. 即对$\forall l\in L$ 均有 $(x-\hat{x},l)=0$ $\hat{x}$称为x在闭子空间L上的投影.

定理3. B是Hilbert空间H中闭凸子集. $x\in H\setminus B$. 下列命题等价

(i) $\hat{x}\in B$是x最佳逼近 即对$\forall b\in B$, 均有 $\|x-\hat{x}\|\le\|x-b\|$.

(ii) $\hat{x}\in B$满足: 对任意$b\in B$. 均有 $(x-\hat{x},b-\hat{x})\le 0$.

角度概念.

正交化方法: $\{e_1,e_2\cdots\}$是Hilbert空间中一组元素. 对任意$i\ne j$. $(i,j\in N^+)$.

均有 $(e_i,e_j)=0$. 称 $\{e_1,e_2\cdots\}$是H中正交基. 若每个e_i都是单位元素(范数为1). 称之为规范正交集. 即H中规范正交基满足:

$(e_i,e_j)=\delta_{ij}=\begin{cases}1 & i=j\\ 0 & i\ne j\end{cases}$ 内积空间正交基.线性无关.

Gram-Schmidt正交化.

令 $e_1=\frac{x_1}{\|x_1\|}$ $u_2=x_2-(x_2,e_1)e_1$. $e_2=u_2/\|u_2\|$.

一般地. 令 $u_n=x_n-\sum_{k=1}^{n-1}(x_n,e_k)e_k$.

且取 $e_n=u_n/\|u_n\|$.

可得规范正交基 $e_1,e_2\cdots e_n$.

Hilbert空间傅里叶级数(略).

正交补:

S是希尔伯特空间H子集. H中所有正交于S的元素集合称为S的正交补. 记为$S^\perp$

定理: L是Hilbert空间H中闭子空间. 则$H=L\oplus L^\perp$ 且 $(L^\perp)^\perp=L$.

索伯列夫空间:

区间$[a,b]$上一阶连续可微函数全体构成集合记为$H^1[a,b]$. 通常加法数乘.

$H^1[a,b]$线性空间. 对任意 $u(t),v(t)\in H^1[a,b]$. 定义内积.

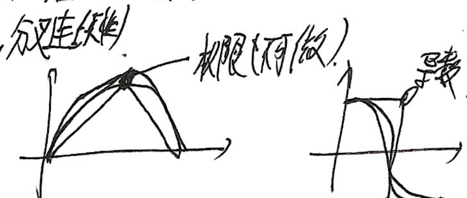
$(u,v)=\int_a^b u(t)v(t)dt+\int_a^b u'(t)v'(t)dt$. 内积空间.

范数 $\|u\|=\left[\int_a^b[u(t)]^2dt+\int_a^b[u'(t)]^2dt\right]^{\frac{1}{2}}$.

在$\|u\|$下完备化空间$H^1[a,b]$ — Sobolev空间.

Sobolev (广义导数,分段连续性)

一阶广义导数.



算子.

X,Y. 给定线性赋范空间. $D\subset X$ D中每个x. 对应Y中一个y. 确定一个算子. T表示. $y=Tx$ y为x像 x为y原像. D称为T定义域 $D(T)$. $R(T)=\{y|y\in Y, y=Tx, x\in D(T)\}$ 为T值域. $T:X\to Y$.

映射 T是X到Y算子.

线性算子:

X,Y给定线性空间 算子$T:X\to Y$. T满足

(1) $\forall x,y\in D(T)$, $T(x+y)=Tx+Ty$

(2) $\forall x\in D(T)$, $\forall\alpha\in K$, $T(\alpha x)=\alpha T(x)$

T为$X\to Y$线性算子.

算子的零空间:

X, Y 两个线性空间. $P\ X\to Y$ 算子.

$N(P)=\{x;\ P(x)=0,\ x\in D(P)\}$.

算子P的零空间 (值为0的所有x).

算子图像:

P $D(P)\subset E$ 在E_1中取值的线性算子. P的图像 $E\times E_1$中 $\{x, P(x)\}$ 全体. P_G x取遍$D(P)$.

算子有界.

$\exists$正常数M, 对每个$x\in D(P)$, 均有

$$\|P(x)\|_Y\le M\|x\|_X.$$

称$P: X\to Y$有界

算子连续:

$P: X\to Y$. P在$x_0\in X$今邻域有定义. 当$\|x_n-x_0\|\to 0$ $(n\to\infty)$时, 有$\|P(x_n)-P(x_0)\|\to 0$, $(n\to\infty)$ P在x_0处连续的. 若在$D(P)$每一点都连续. P是连续的算子.

定理: $P: X\to Y$ 是线性算子. P在某点$x_0\in D(P)$连续, P在$D(P)$内处处连续. (推导时用线性算子的性质)

定理: 设$P: X\to Y$是线性算子, P连续充要条件是P有界

算子范数:

$P: X\to Y$有界线性算子. 对一切$x\in D(P)$使得不等式 $\|P(x)\|_Y\le M\|x\|_X$ 成立的正数M的下确界 为算子P的范数. 即

$$\|P\|=\sup_{\|x\|\ne 0}\frac{\|P(x)\|}{\|x\|} \qquad \frac{\|Px\|_Y}{\|x\|_X}\ \text{上界}$$

定理: $P: X\to Y$ 有界线性算子, 则

$$\|P\|=\sup_{\|x\|\ne 0}\frac{\|P(x)\|}{\|x\|}=\sup_{\|x\|=1}\|P(x)\|=\sup_{\|x\|\le 1}\|P(x)\|$$

算子乘积

$P_1: X\to Y$ $P_2: Y\to Z$ 且 $R(P_1)\subset D(P_2)$ 则P_1, P_2乘积是由X到Z的算子. 记为 $(P_2P_1)(x)=P_2(P_1(x))$.

有界线性算子空间:

$X(\ne 0)$, Y线性赋范空间. 定义在X上, 在Y取值 有界线性算子全体, 记为$L(X,Y)$. 若规定$L(X,Y)$中任两个算子.

加法 $(P_1+P_2)(x)=P_1(x)+P_2(x)$

数乘 $(\lambda P)(x)=\lambda P(x)$

则$L(X,Y)$为线性空间.

定理: X线性赋范空间. Y为Banach空间. $L(X,Y)$为Banach空间.

算子强收敛:

$\{P_n\}\subset L(X,Y)$ $P\in L(X,Y)$ 对$\forall x\in X$, 均有$\|P_n(x)-P(x)\|\to 0$.

算子$\{P_n\}$强收敛于P.

逆算子:

$X\to Y$. 对每个$y\in R(P)$有唯一$x\in D(P)$对应 $P(x)=y$. 算子P是一对一的 (单射的)

定理: 线性算子P一对一充要条件是零空间只含零元素.

下有界算子: $T: X\to Y$. 存在常数$C>0$. 对任意$x\in X$, 均有

$$\|Tx\|_Y\ge C\|x\|_X.$$

T为下有界算子.

解的稳定性:

U, F线性赋范空间, $K: U\to F$ 线性算子 求$u\in U$, $Ku=f$.

当K双射的且下有界, 则有

$$\|u\|_U=\|K^{-1}f\|\le\|K^{-1}\|\cdot\|f\|$$

不动点

X为Banach空间. F为X到X算子. 且$D(F)\cap R(F)$非空, 若点$x^*\in X$ 满足$F(x^*)=x^*$, x^*为算子F不动点. 或说不动点x^*是算子方程 $x=F(x)$解.

压缩算子 压缩系数

设集合$Q\subset D(F)$ 若存在常数$q\in(0,1)$ 对任意$x', x''\in Q$均有

$$\|F(x')-F(x'')\|\le q\|x'-x''\|.$$

F为Q上压缩算子. q压缩系数.

压缩映像原理

算子F映射Banach空间X的闭集Q为自己. F为压缩算子, 压缩系数q, 则算子F在Q内存在唯一不动点x^*, 使得$F(x^*)=x^*$. 若x_0为Q内任意点, 作序列 $x_{n+1}=F(x_n)$ $(n=0,1,2\cdots)$ 序列$\{x_n\}\subset Q$ $x_n\to x^*$. 有

误差估计. $\|x_n-x^*\|\le\frac{q^n}{1-q}\|F(x_0)-x_0\|$. 多解析根注意区间

使用时 $F'(x)\le q$. 先验证q再迭代.

$0<|F'(x)|<1$. 压缩算子. 定义域 进去 $F(x)$ 判大范围

泛函.

X是R上线性赋范空间, D是X子空间. $f: D\to R$. 若f满足. $f: D\to R$.

$\forall\alpha,\beta\in R$, $x, y\in D$, $f(\alpha x+\beta y)=\alpha f(x)+\beta f(y)$

f是D上线性泛函. 由X到实数域算子为泛函.

有界线性泛函 f 在 X 处值 $f(x)$ 可表示为 $f(x)=\langle x,f\rangle$，$x\in X$.

线性 $\langle \alpha x+\beta y, f\rangle=\alpha\langle x,f\rangle+\beta\langle y,f\rangle$.

共轭空间：　(区别)有界线性算子空间.

定义在整个线性赋范空间 X 上所有有界线性泛函，构成 $L(X,R)$

称为空间 X 的共轭空间，记为 X^*.

无论 X 是否完备，X^* 总完备.

n 维欧几空间 E_n 的共轭空间.

E_n 中每个元素表示为 n 个有序数组 $x=\{\xi_1,\xi_2\cdots\xi_n\}$，范数定义

$\|x\|=(\sum_{i=1}^{n}|\xi_i|^2)^{\frac{1}{2}}$. 给定一 n 个有序数组 $F(x)=\sum_{i=1}^{n}\xi_i\eta_i$ 为 E_n 上

一有界线性泛函.　　　　共轭空间是它本身.

E_n 上有界线性泛函一般形式. $F(x)=\sum_{i=1}^{n}\xi_i\eta_i$.

且 $(E_n)^*$ 与 E_n 等距同构 (常用)

若 $F_k(e_j)=\delta_{kj}=\begin{cases}1 & k=j\\ 0 & k\neq j\end{cases}$.

$\{F_1,F_2,\cdots F_n\}$ 为 $\{e_1,\cdots e_n\}$ 对偶基.

$F=\eta_1F_1+\eta_2F_2+\eta_3F_3\cdots\cdots$

其中 $\{F_1,F_2\cdots F_n\}$ 是 E_n^* 的基.

Hilbert 空间的线性泛函是由 H 空间的元素产生 $F(x)=(y,x)$. 自共轭

定理：X 是有限维空间，若 $x_0\in X$，对一切 $F\in X^*$ 有

$F(x_0)=0$. 即 $\forall F\in X^*$ $\langle x_0,F\rangle=0\Rightarrow x_0=0$.

枝子定理

Riesz 表示定理：对于 Hilbert 空间 H 上任一有界线性泛函 F.

存在唯一 $y\in H$，使 $F(x)=(y,x)$. 且 $\|F\|=\|y\|$. 反之，任一

$y\in H$ 唯一确定 H 上一有界线性泛函 F，满足 $F(x)=(y,x)$.

且 $\|F\|=\|y\|$.

弱收敛：X 线性赋范空间，$\{x_n\}\subset X$，$x_0\in X$. 每个 $F\in X^*$，

均有 $\lim_{n\to\infty}F(x_n)=F(x_0)$　$\{x_n\}$ 弱收敛于 x_0.

强收敛　$\{x_n\}\to\{x_0\}$

弱*收敛　$F_n(x)\to F_0(x)$

共轭算子：X,Y 线性赋范空间，$P\in L(X,Y)$ 给定 $y^*\in Y^*$.

$\langle P(x),y^*\rangle$ 是 X 上泛函.

即 $\varphi(x)=\langle x,\varphi\rangle=\langle P(x),y^*\rangle=\langle x,P^*(y^*)\rangle$.

(Y^* 为定义在 Y 上所有所有有界线性泛函 $L(Y,R)$，共轭空间)

J

P^* 定义在 Y^* 上 且 $P^*\in L(Y^*,X^*)$. P^* 为 P 共轭算子.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, dash, "P"] \arrow[d] & Y \arrow[d] \\ X^* & Y^* \arrow[l, "P^*"'] \end{tikzcd}$$

X 经 $P^*(y^*)$ 得 X^* (泛函结果).

性质：

(i) $P_1,P_2\in L(X,Y)$ 则 $(P_1+P_2)^*=P_1^*+P_2^*$.

(ii) $P\in L(X,Y)$ α 实数　$(\alpha P)^*=\alpha P^*$

(iii) $P_1\in L(X,Y)$ $P_2\in L(Y,Z)$　$(P_2P_1)^*=P_1^*P_2^*$.

(iv) $P\in L(X,Y)$　$(P^*)^{-1}=(P^{-1})^*$.

Hilbert 空间中共轭算子.

由于 $H^*=H$. 故 $(Ax,y)=(x,A^*(y))$　(Hilbert 泛函 (y,x)).

若 $A=A^*$. 自共轭算子.

其中 y 对应 y^*.

此处有题.

正交，正交补.

$\langle x,F\rangle=0$. x 与 $F\in X^*$ 正交

S 是 X 子集. 与 S 中任一元素的正交泛函全体，$S^\perp$ 正交补.

有 $S^\perp=\{F\in X^*;\langle x,F\rangle=0, x\in S\}$

定理 X,Y 线性赋范空间 $A\in L(X,Y)$ $[R(A)]^\perp=N(A^*)$.

定理 $R(P)$ 线性赋范 Y 闭子空间. $R(P)=[(R(P))^\perp]^\perp=[N(P^*)]^\perp$.

$N(x)$ 为零空间.　　$R(A)$ 值域.

定理 $P\in L(H,H)$ $P(x)=f$. 其中 $f\in H$ $R(P)$ 闭. f 满足

$(f,y^*)=0$. $\forall y^*\in N(P^*)$.

则问题解存在.

一阶变分

X 线性赋范空间. $x_0\in X$. $F(x)$ 在 x_0 及其邻域有定义泛函. 对任意 $h\in X$.

若极限 $\lim_{t\to 0}\frac{F(x_0+th)-F(x_0)}{t}$ 存在 记为 $\delta F(x_0;h)$ 泛函 F 在 x_0 处关于增量

h 一阶变分.

令 $\varphi(t)=F(x_0+th)$. $\varphi'(0)=\delta F(x_0;h)$.

写作 $\delta F(x_0;h)=\frac{d}{dt}F(x_0+th)|_{t=0}$.

Gateaux 微分.

$\delta F(x_0;h)$ 关于 h 有界线性泛函. 记为 $F'(x_0)$. 有　$\delta F(x_0;h)=\langle h,F'(x_0)\rangle$.

F 在 x_0 处加托可微.

$dF(x_0;h)=\langle h,F'(x_0)\rangle=F'(x_0)h$. F 在 x_0 关于 h 加托微分.

$F'(x_0)$ 称为 F 在 x_0 处加托导数.

一阶变分用加权余数求.

变分法基本引理:

对于任意 $v(x)\in C[a,b]$, $u(x)\in C[a,b]$ 均有

$$\int_a^b u(x)v(x)dx=0$$

则有 $u(x)\equiv 0$ $\forall x\in[a,b]$.

泛函极值必要条件:

设X是Banach空间, 泛函F在点 $x_0\in X$ 邻域S有定义, 存在 x_0 一个邻域 $S_1\subset S$, 对所有 $x\in S_1$ 均有 $F(x_0)\le F(x)$. x_0 局部极小点, $F(x_0)$ 局部最小值.

定理 设泛函F在 x_0 达极值, 在 x_0 处对任意h 均存在一阶变分 $\delta F(x_0,h)$ 则 $\delta F(x_0,h)=0$.

欧拉-拉格朗日方程

注意变量 一阶变分为0. 注意 $h(a)$ $h(b)$ 取值.

边界条件 自然边界条件 第一个.

增广Lagrange泛函

x_0 是泛函F在约束条件 $\Psi_i(x)=0$ $i=1,2,\dots n$ 下极值点.

存在n个常数 $\lambda_1,\lambda_2 \dots \lambda_n$ 使泛函

$$L(x,\lambda)=F(x)+\sum_{i=1}^n \lambda_i \Psi_i(x)$$ 以 x_0 为驻点,

即 $F'(x_0)+\sum_{i=1}^n \lambda_i \Psi_i'(x_0)=0$.

最小势能原理:

在一切具有适当光滑性, 满足 S_u 上给定位移边界条件位移场中.

真实位移使总势能最小.

$$\Pi(u)=\int_V W(\varepsilon)dV-\int_V f\cdot u\,dV-\int_{S_\sigma}\bar{p}\cdot u\,dS$$

$$\delta\Pi=\Pi(u+\delta u)-\Pi(u)=\int_V \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}}\delta\varepsilon_{ij}dV-\int_V f_i\delta u_i dV-\int_{S_\sigma}\bar{p}_i\delta u_i dS$$

$=0$

$$\delta\Pi=-\int_V(\sigma_{ij,j}+f_i)\delta u_i dV-\int_{S_\sigma}(\bar{p}_i-\sigma_{ij}n_j)\delta u_i dS$$

得 $\begin{cases}\sigma_{ij,j}+f_i=0 & \text{in } V\\ \bar{p}_i=\sigma_{ij}n_j & \text{on } S_\sigma\end{cases}$

位移场对应应力场满足域内平衡和力边界

最小余能原理:

在一切具有适当光滑性且满足 S_σ 上给定应力边界条件及域内平衡条件应力场中, 真实应力场使系统总余能最小.

$$\Pi_c(\sigma)=\int_V W_c(\sigma_{ij})dV-\int_{S_u}\bar{u}_i\sigma_{ij}n_j dS$$

$$\delta\Pi_c(\sigma)=\int_V\frac{\partial W_c}{\partial\sigma_{ij}}\delta\sigma_{ij}dV-\int_V\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i})\delta\sigma_{ij}dV=0.$$

$\frac{\partial W_c}{\partial\sigma_{ij}}=\varepsilon_{ij}$ 几何方程.

H-R变分原理:

$$L(\sigma,\lambda,u)=\int_V W_c(\sigma)dV-\int_{S_u}\sigma\cdot n\cdot\bar{u}\,dS+\int_V\lambda(\nabla\cdot\sigma+f)dV+\int_{S_\sigma}u(\sigma\cdot n-\bar{p})dS$$

得 $\begin{cases}\frac{\partial W_c}{\partial\sigma}=\varepsilon\\ \varepsilon=\frac{1}{2}(\nabla u+u\nabla)\\ u=\bar{u}\\ \nabla\cdot\sigma+f=0\\ \bar{p}-\sigma\cdot n=0\end{cases}$

H-R变分原理. 真实位移场 $u\in H^1$ 和应力场 $\sigma\in L^2$ 使 Π_{HR} 取驻值.

Ritz法: 用总势能取极值求近似解.

完全基函数 $\phi_1,\phi_2,\cdots\phi_n$.

Galerkin法(虚功原理) 微分方程的形式.

用C类 严格于Ritz的 C^0 类.

补. 流形: L是线性空间E子空间 $x_0\in E\setminus L$ $x_0+L=\{x_0+l \mid l\in L\}$ E流形

L维数 称为流形L维数 m维流形+1维 坐标用m个任意参数.

$Ax=b$ 有解 秩r. 解是 R_n 中 $n-r$ 维 线性流形

有限维线性赋范空间必然完备.

X线性赋范 Y Banach $L(X,Y)$ Banach空间

向量无穷范数. 范数绝对值较大者.

球. r为一正数 $S_r(x_0)=\{x\in X;\ d(x,x_0)<r\}$ (X,d) 中开球. x_0 $S_r(x_0)$ 中心 r半径.

(X,d) 距离M子集. $x_0\in M$ $\exists$ x_0 $S_r(x_0)$ $S_r(x_0)\subset M$ x_0 为M内点. 若全是内点开集

$M\subset(X,d)$ $x_0\in X$ 任一包含 x_0 开球 $S_r(x_0)$ 总有异于 x_0 M内的点 聚点

所有聚点 M' 称 $M\cup M'$ 闭包. $M\supset\bar{M}$ 闭集.

P_n. n次多项式空间 n+1维. R_n n维 M_{mn} $m\times n$维.

$C[a,b]$ $C^n[a,b]$ 无穷维.

P_n. $\sum_{i=0}^n a_i x^i$ x^i 为基底.

y_1,y_2 是 $y''+2y'-3=0$ 两解. y_1,y_2,y_3 相关性

假设 $\alpha y_1+\beta y_2+\delta y_3=0$.

$\begin{cases}\alpha y_1+\beta y_2+\delta y_3=0 & ①\\ \alpha y_1'+\beta y_2'+\delta y_3'=0 & ②\\ \alpha y_1''+\beta y_2''+\delta y_3''=0 & ③\end{cases}$ ③用式替换 系数矩阵 $|\ |=0$ α,β,γ 不同时为0 有非零解.

发现是线性相关、 区别基本列 / 收敛