第一章 特征值的性质和估计

①幂法，计算主特征值和对应特征向量　计算[A]

一向量 $\vec{v}$. 规范化 $\vec{u} = \frac{\vec{v}}{\max(\vec{v})}$ （V中最大那个）

若好几个一样大，取最小编号.

方法：任取 $\vec{v_0} \neq 0$.

$V_1 = [A]\vec{u_0} = [A]\vec{v_0}$　　$u_1 = \frac{v_1}{\max(v_1)} = \frac{Av_0}{\max(Av_0)}$

$V_2 = [A]\vec{u_1} = \frac{A^2 v_0}{\max(Av_0)}$　　$u_2 = \frac{v_2}{\max(v_2)} = \frac{A^2 v_0}{\max(A^2 v_0)}$

⋮

$A^k v_0 = \lambda_1^k [a_1 x_1 + \sum_{i=2}^{n} a_i (\lambda_i/\lambda_1)^k x_i]$

$u_k = \frac{x_1}{\max(x_1)}$　$\max(v_k) = \lambda_1$

例 $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 10 & 3 & 4 \\ 3 & 6 & 1 \end{bmatrix}$　取 $v_0 = u_0 = (1,1,1)^T$

$\begin{cases} v_k = Au_{k-1} \\ \mu_k = \max(v_k) \\ u_k = \frac{v_k}{\mu_k} \end{cases}$　　$v_1 = (7,17,10)$　$\mu_1 = 17$

$u_1 = \frac{v_1}{\mu_1} = (0.4118, 1, 0.5882)$

$Au_1 = V_2 = (0.528, 1, 0.826) \times 9.472$.

∴ $u_2 = (0.528, 1, 0.826)$

$V_3 = Au_2$ → 取最大 → u_3 → $Au_3 = u_4$ …

最后 μ_k 趋于特征值．得到的 $u_k (k \to \infty)$ 为对应特征向量.

（原点平移，瑞利商加速 略）

②反幂法　A取倒数，同上

③雅克比方法　求全部特征值.

n阶吉斯矩阵 $\begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & \cos\theta & \cdots & -\sin\theta & \\ & & \vdots & \ddots & \vdots & \\ & & \sin\theta & \cdots & \cos\theta & \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix}$ p行 q行

(I)正交　(II) $R^T(p,q)A$ 改p,q行　$AR(p,q)$ 改p,q列

$(tg2\theta) = \frac{a_{pp}^{(k-1)} - a_{qq}^{(k-1)}}{2a_{pq}^{(k-1)}} = b$.　$t = tg\theta$　$b = \frac{1-t^2}{2t}$

$R^T(p,q)\ A\ R(p,q)$ 可将p行q列，q行p列化为0.

（用此条件得到θ表达式）　化为对角阵．特征向量

计算时，消比较大的.　　$V = R_1 R_2 \cdots R_n$.

例　$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

取 p=1 q=2.

① $b = \frac{a_{pp} - a_{qq}}{2a_{pq}} = \frac{2-1}{-1\times 2} = -0.5$.

② $t = \mathrm{sgn}(b)/(|b| + \sqrt{1+b^2}) = -0.61802$.

③ $\cos\theta = (1+t^2)^{-\frac{1}{2}} = 0.85065$.

④ $\sin\theta = t \cdot \cos\theta = -0.52573$.

∴ $R_1 = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.85065 & 0.52573 \\ -0.52573 & 0.85065 \end{bmatrix}$.

∴ $A_1 = R_1^T A R_1 = \begin{bmatrix} 2.6180 & 0 \\ 0 & 0.38196 \end{bmatrix}$

∴ $\lambda_1 = 2.6180$　　$\lambda_2 = 0.38196$

$V = R_1$　$x_1 = \begin{bmatrix} 0.85065 \\ -0.52573 \end{bmatrix}$　$x_2 = \begin{bmatrix} 0.52573 \\ 0.85065 \end{bmatrix}$

④Householder方法　实现矩阵三对角化

一般矩阵 ⟶ 上Hessenberg矩阵

对称矩阵 ⟶ 对称三对角矩阵

(I) 约化定理 约化向量

$\boxed{Hx = -\sigma e_1}$

$\begin{cases} H = I - \beta^{-1}uu^T \\ \sigma = \mathrm{sgn}(x_1)\|x\|_2 \\ u = x + \sigma e_1 \\ \beta = \frac{1}{2}\|u\|_2^2 = \sigma(\sigma + x_1) \end{cases}$

例：$x = (3,5,1,1)^T$

$\|x\|_2 = 6$．取 $\sigma = 6$

$u = x + 6e_1 = (9,5,1,1)^T$　$\|u\|_2^2 = 108$　$\beta = \frac{1}{2}\|u\|_2^2 = 54$.

$H = I - \beta^{-1}uu^T = \frac{1}{54}\begin{bmatrix} -27 & -45 & -9 & -9 \\ -45 & 29 & -5 & -5 \\ -9 & -5 & 53 & -1 \\ -9 & -5 & -1 & 53 \end{bmatrix}$

顺序　计算x范数 → σ → u → $\|u\|_2$ → β → …

(II) H_k　k从1取　因为是从2~n约化．故 $H_1 = (1\ \square)$

$H_k = \begin{bmatrix} I_k & 0 \\ 0 & 大 \end{bmatrix}$　n-2次变换．A_{n-2}

多次迭复．每次缩1　　同约化范数．但是是HAH

[先约化列 后约化行]

做到矩阵变换

例 $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

取向量 $[3,4]^T$

$\sigma=5.\quad U^T=(8,4)$

$\beta=\frac{1}{2}\|U\|_2^2=40\quad H=\left(I-\frac{1}{40}\times\begin{pmatrix}8\\4\end{pmatrix}(8,4)\right)$

$=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-\frac{3}{5}&-\frac{4}{5}\\0&-\frac{4}{5}&\frac{3}{5}\end{pmatrix}$

$A_1=HAH=\begin{pmatrix}1&-5&0\\-5&2.92&0.56\\0&0.56&-0.92\end{pmatrix}$

$I-\beta^{-1}UU^T=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\frac{8}{5}&\frac{4}{5}\\\frac{4}{5}&\frac{2}{5}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{3}{5}&-\frac{4}{5}\\-\frac{4}{5}&\frac{3}{5}\end{pmatrix}$

矩阵顺序及注意事项.

取向量(维数)→计算 σ → U → $\|U\|_2^2$ → β →

$\beta^{-1}UU^T$ → $I-\beta^{-1}UU^T$ → 与大矩阵并得到 H.

截止到 $I-\beta^{-1}UU^T$ 均是在小矩阵操作.

⑤ QL方法.(无位移量) Q正交 L下三角

$A=Q_1L_1\rightarrow Q_1^TA=L_1$ (处理三对角矩阵)

因为确定正交矩阵使 A_1 成为下三角.故取Givens矩阵.

$Q_1^T=R^T(1,2)R^T(2,3)\cdots R^T(n-1,n)$ 注意顺序

为使 $(n-1,n)$ 处为零.

$$\begin{bmatrix}1&&&\\&\ddots&&\\&&c_n&s_n\\&&-s_n&c_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}d_1&e_1&&&\\e_1&d_2&\ddots&&\\&\ddots&\ddots&e_{n-2}&0\\&&e_{n-2}&d_{n-1}&e_{n-1}\\&&&e_{n-1}&d_n\end{bmatrix}$$

$c_i=\frac{d_i}{\sqrt{d_i^2+e_{i-1}^2}}\quad s_i=-\frac{e_{i-1}}{\sqrt{d_i^2+e_{i-1}^2}}$

$\underbrace{R^T(1,2)R^T(2,3)\cdots R^T(n-1,n)}_{Q^T}A_1=L_1$

$R(n-1,n)$ 化三 要 $R^T(n-1,n)\times A_1$ 得 A_2 算 $R^T(n-2,n-1)$

(若要求特征值. $A_1=Q_1L_1\quad A_2=L_1Q_1=Q_2L_2$

即 $\begin{cases}A_k=Q_kL_k\\A_{k+1}=L_kQ_k\\k=1,2\cdots\end{cases}$ 最后 A_k 收敛于对角阵)

例. $A=\begin{bmatrix}1&2&0\\2&-1&1\\0&1&3\end{bmatrix}$ 进行QL分解

化(2,3) $\cos\theta_1=\frac{d_3}{\sqrt{d_3^2+e_2^2}}=\frac{a_{33}}{\sqrt{a_{33}^2+a_{23}^2}}=\frac{3}{\sqrt{10}}$

$\sin\theta_1=-\frac{1}{\sqrt{10}}$

$R(2,3)=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&\cos\theta_1&-\sin\theta_1\\0&\sin\theta_1&\cos\theta_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&\frac{3\sqrt{10}}{10}&\frac{\sqrt{10}}{10}\\0&-\frac{\sqrt{10}}{10}&\frac{3\sqrt{10}}{10}\end{bmatrix}$

$A_2=R^T(2,3)\cdot A_1=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{10}}{5}&\frac{2}{\sqrt{10}}&0\\\frac{2\sqrt{10}}{5}&-\frac{\sqrt{10}}{5}&0\\\frac{\sqrt{10}}{5}&\frac{\sqrt{10}}{5}&\sqrt{10}\end{bmatrix}$

$\cos\theta_2=\frac{a_{22}}{\sqrt{a_{22}^2+a_{12}^2}}=\frac{-5}{\sqrt{\frac{40}{25}+4}}=-\sqrt{\frac{2}{7}}$

$\sin\theta_2=-\frac{a_{23}}{\sqrt{a_{22}^2+a_{12}^2}}=-\sqrt{\frac{5}{7}}$

$R(1,2)=\begin{bmatrix}\cos\theta_2&-\sin\theta_2&0\\\sin\theta_2&\cos\theta_2&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\sqrt{\frac{2}{7}}&\sqrt{\frac{5}{7}}&0\\-\sqrt{\frac{5}{7}}&-\sqrt{\frac{2}{7}}&0\\0&0&1\end{bmatrix}$

$A_3=R^T(1,2)\cdot A_2=\begin{bmatrix}-\frac{4\sqrt{10}\sqrt{35}}{35}&0&0\\-\frac{\sqrt{35}}{35}&\frac{2\sqrt{35}}{5}&0\\\frac{\sqrt{10}}{5}&\frac{\sqrt{10}}{5}&\sqrt{10}\end{bmatrix}$

$\therefore L=A_3\quad Q=R(2,3)\times R(1,2)$

$\sin\theta,\cos\theta$ 算完是Givens的值 写出 R.

用 $R^T\times A_n$ 得 A_{n+1}. 利用 A_{n+1} 得 $\cos\theta,\sin\theta$, 写下一个 R.

直到化为下三角.

$Q^T=R^T(1,2)R^T(2,3)\cdots R^T(n-1,n)$

算时. $R^T(1,2)\ R^T(2,3)\cdots R^T(n-1,n)\ A=L$

则 $R^T(2,3)\cdots R^T(n-1,n)\ A=R(1,2)L$

$Q=R(n-1,n)\ R(n-2,n-1)\cdots R(1,2)$

$Q=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\frac{3\sqrt{10}}{10}&\frac{\sqrt{10}}{10}\\0&-\frac{\sqrt{10}}{10}&\frac{3\sqrt{10}}{10}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\sqrt{\frac{2}{7}}&\sqrt{\frac{5}{7}}&0\\-\sqrt{\frac{5}{7}}&-\sqrt{\frac{2}{7}}&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-0.53471&0.84517&0\\-0.80177&-0.50709&0.31623\\0.26726&0.16903&0.94868\end{pmatrix}$

⑥ 广义特征值问题

$Ax=\lambda Bx.$ ① $B^{-1}Ax=\lambda x$ 无对称性 直接求解

② $B=LL^T$ L下三角 $Ax=\lambda Bx$.

$Ax=\lambda LL^Tx.\quad L^{-1}Ax=\lambda L^Tx$

$L^{-1}A(L^{-1})^T\underbrace{L^Tx}_{y}=\lambda\underbrace{L^Tx}_{y}.\quad (Cy=\lambda y)$

$y=L^Tx.\quad C=L^{-1}A(L^{-1})^T$

令 $G=L^{-1}A.\quad LG=A.$

$CL^T=L^{-1}A(L^{-1})^TL^T=L^{-1}A=G.$

LL^T 分解后 → $C=L^{-1}A(L^{-1})^T$ $Cy=\lambda y$. 解出 y → $y=L^Tx$

求得 x.

1)求广义特征值.

LL^T 分解: 设矩阵, 一行一行处理.

eg. $\begin{bmatrix}1&1&2\\1&2&0\\2&0&11\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}l_{11}&&\\l_{21}&l_{22}&\\l_{31}&l_{32}&l_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}l_{11}&l_{21}&l_{31}\\&l_{22}&l_{32}\\&&l_{33}\end{bmatrix}$

有 $l_{11}=\sqrt{a_{11}}=1$　$l_{21}=\frac{a_{21}}{l_{11}}=\frac{1}{1}=1$　$l_{31}=\frac{a_{31}}{l_{11}}=\frac{2}{1}=2$.

$l_{22}=\sqrt{a_{22}-l_{21}^2}=1$　$l_{32}=\frac{a_{32}-l_{31}l_{21}}{l_{22}}=-2$.　$l_{33}=\sqrt{a_{33}-l_{31}^2-l_{32}^2}=\sqrt{3}$

$\therefore L=\begin{bmatrix}1 & & \\ 1 & 1 & \\ 2 & -2 & \sqrt{3}\end{bmatrix}$.

广义特征值问题.

$AX=\lambda BX$.　$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\ 2 & 5 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{bmatrix}$　$B=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 2 & 5 & 4\\ 1 & 4 & 6\end{bmatrix}$.

$B=LL^T=\begin{bmatrix}1 & & \\ 2 & 1 & \\ 1 & 2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ & 1 & 2\\ & & 1\end{bmatrix}$

$C=L^{-1}A(L^{-1})^T$　$Cy=\lambda y$. $\rightarrow$ $y=L^TX$ 由此可解.

特征向量.

第二章: 样条函数

① 样条函数.

(I) 半截单项式 $x_+^k=\begin{cases}x^k & x\geq 0\\ 0 & x<0\end{cases}$　$k=0,1,2\cdots$

$k=0,1$ 时. x_+^k 在0处无导数.

(II) $a=x_0<x_1<x_2\cdots<x_n=b$ 是 $[a,b]$ 分割.

(内点) $(x-x_j)_+^k$.　$j=1,2,\cdots(n-1)$.

$\sum_{j=1}^{n-1}c_j(x-x_j)_+^k$.

边界构 k 次多项式 $\sum_{j=0}^{k}a_jx^j$

$S(x)=\sum_{j=0}^{k}a_jx^j+\sum_{j=1}^{n-1}c_j(x-x_j)_+^k$ 为 k 次样条函数.

$(n+1)+(k-1)$ 个参数

$[a,b]$ 给出函数值表或导数值表: $n+1$ 个条件.

$k-1$ 个条件利用边界条件.

② 二次样条插值.

问题1). x_i,y_i (函数值) + x_0 的 y_0'.

满足 $S'(x_0)=y_0'$　$S(x_i)=y_i$.

问题2). x_i,y_i' (导数值) + x_0 的 y_0.

满足 $S(x_0)=y_0$.　$S'(x_i)=y_i'$

求解. 设 $S(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+c_1(x-x_1)_+^2$ 代入解.

③ 三次样条插值.

$S(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\sum_{j=1}^{n-1}c_j(x-x_j)_+^3$.　待定 $n+3$

问题1. $S(x_i)=y_i$　$(i=1,2,\cdots,n-1)$.　内.

$S(x_i)=y_i$　$S'(x_i)=y_i'$　$(i=0,n)$ 边

问题2. $S(x_i)=y_i$　$(i=1,2,\cdots n-1)$

$S(x_i)=y_i$　$S''(x_i)=y_i''$　$(i=0,n)$ 边 (二阶导)

问题3. 周期性

求解同二次.

注意. $[c_i(x-x_i)_+^k]'=kc_i(x-x_i)_+^{k-1}$ 正常求导

解方程.

④ 三弯矩法.　各段上三次多项式参数不同

三次多项式. $[x_{j-1},x_j]$ 上　$S''(x_j)=M_j$　在点上.

线性插值　$S''(x)=M_{j-1}\frac{x_j-x}{h_{j-1}}+M_j\frac{x-x_{j-1}}{h_{j-1}}$　$h_{j-1}=x_j-x_{j-1}$.

二次导数为一次多项式.

$S(x)=\frac{M_{j-1}}{6h_{j-1}}(x_j-x)^3+\frac{M_j}{6h_{j-1}}(x-x_{j-1})^3+c_1(x-x_{j-1})+c_2(x_j-x)$

代入 $S(x_j)=y_j$　$S(x_{j-1})=y_{j-1}$.

$$\begin{cases}c_1=\frac{y_j}{h_{j-1}}-\frac{M_j}{6}h_{j-1}\\ c_2=-\frac{y_{j-1}}{h_{j-1}}+\frac{M_{j-1}h_{j-1}}{6}\end{cases}$$

代入 $S(x)=M_{j-1}\frac{(x_j-x)^3}{6h_{j-1}}+M_j\frac{(x-x_{j-1})^3}{6h_{j-1}}+\left(y_{j-1}-\frac{M_{j-1}h_{j-1}^2}{6}\right)\frac{x_j-x}{h_{j-1}}+\left(y_j-\frac{M_jh_{j-1}^2}{6}\right)\frac{x-x_{j-1}}{h_{j-1}}$.

由 $S'(x_j+0)=S'(x_j-0)$. 得

$\mu_jM_{j-1}+2M_j+\lambda_jM_{j+1}=d_j$

其中 $\mu_j=\frac{h_{j-1}}{h_{j-1}+h_j}$

$\lambda_j=1-\mu_j$.

$d_j=6\left(\frac{y_{j+1}-y_j}{h_j}-\frac{y_j-y_{j-1}}{h_{j-1}}\right)/(h_{j-1}+h_j)$.

对边界. 有情况补充 $S'(x_0)=y_0'$　$S'(x_n)=y_n'$

导出两个方程.
$$\begin{cases}2M_0+M_1=6\left(\frac{y_1-y_0}{h_0}-y_0'\right)/h_0\\ M_{n-1}+2M_n=6\left(y_n'-\frac{y_n-y_{n-1}}{h_{n-1}}\right)/h_{n-1}\end{cases}$$

边界处理三种情况:

① $S'(x_0)=y_0'$ $S'(x_n)=y_n'$

$2M_0+M_1=6\left(\frac{y_1-y_0}{h_0}-y_0'\right)/h_0$

$M_{n-1}+2M_n=6\left(y_n'-\frac{y_n-y_{n-1}}{h_{n-1}}\right)/h_{n-1}$

② $S''(x_0)=y_0''$ $S''(x_n)=y_n''$

$M_0=y_0''$ $M_n=y_n''$

③ $S'(x_n)=S'(x_0)$ $S''(x_n)=S''(x_0)$

$M_n=M_0$

方程变为 $\lambda_n=\frac{h_0}{h_0+h_{n-1}}$

$d_n=6\left(\frac{y_1-y_0}{h_0}-\frac{y_n-y_{n-1}}{h_{n-1}}\right)/(h_0+h_{n-1})$

④ I 定类型

II 计算各值与方程组

III 解 M.

IV. 回代.

h 范围 (x).

eg. $f(0)=0$ $f(1)=1$ $f(2)=1$ $f(3)=0$

$f'(0)=1$ $f'(3)=2$

j	x_j	y_j	h_j	λ_j	μ_j	d_j
0	0	0	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	-3
1	1	1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	-3
2	2	1	1			
3	3	0				

$$\begin{cases}2M_0+M_1=0\\ \frac{1}{2}M_0+2M_1+\frac{1}{2}M_2=-3\\ \frac{1}{2}M_1+2M_2+\frac{1}{2}M_3=-3\\ M_2+2M_3=18\end{cases}$$

解得 $\begin{cases}M_0=0.2667\\ M_1=-0.5333\\ M_2=-4.1333\\ M_3=11.0667\end{cases}$

$V_0(x)$ 随x变

则 $S(x)=-0.5333\frac{(2-x)^3}{6}+(-4.1333)\frac{(x-1)^3}{6}+\dots(\ )+(\ )$.

分段节点 每个表达式 只与左右 M_{j-1}, M_j 有关.

第章 有理逼近

~~最佳有理~~ 最佳有理一致逼近函数 $\|f(x)-R_{nm}(x)\|_\infty$最小

$\|f(x)-R_{nm}(x)\|_2$ 最小, 最佳有理平方逼近

① 连分式计算: 辗转相除.

eg. $R_{22}(x)=\frac{3x^2+6x}{x^2+6x+6}$

$R_{22}(x)=3-\frac{12x+18}{x^2+6x+6}$ 保留最大系数

$=3-\frac{12}{\frac{x^2+6x+6}{x+\frac{3}{2}}}=3-\frac{12}{x+\frac{9}{2}-\frac{\frac{3}{4}}{x+\frac{3}{2}}}$

化为小数 $=3-\frac{12}{x+4.5-\frac{0.75}{x+1.5}}$.

② 有理插值

$R_{nm}(x)=\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$. $P_n(x)=\sum_{k=0}^{n}a_kx^k$ $Q_m(x)=\sum_{k=0}^{m}b_kx^k$.

有 $n+m+2$ 参 $n+m+1$ 自由度.

在 $f(x)$ 给定 $n+m+1$ 互异节点, $y_i=f(x_i)$ 求 $R_{nm}(x)$ 在节点满足

计算 使用反差商

$R(x)=v_0(x_0)+\cfrac{x-x_0}{v_1(x_1)+\cfrac{x-x_1}{v_2(x_2)+\cdots+\cfrac{x-x_{n-1}}{v_n(x_n)}}}$

反差商表.

$f(x)$	$v_0(x)$		
$f(x_0)$	$v_0(x_0)$		
$f(x_1)$	$v_0(x_1)$	$v_1(x_1)$	
$f(x_2)$	$v_0(x_2)$	$v_1(x_2)$	$v_2(x_2)$

式中 $v_1(x_1)=\frac{x_1-x_0}{v_0(x_1)-v_0(x_0)}$ $v_1(x_2)=\frac{x_2-x_0}{v_0(x_2)-v_0(x_0)}$

$v_2(x_2)=\frac{x_2-x_1}{v_1(x_2)-v_1(x_1)}$ $v_2(x_3)=\frac{x_3-x_1}{v_1(x_3)-v_1(x_1)}$

$v_n(x_n)=\frac{x_n-x_{n-1}}{v_{n-1}(x_n)-v_{n-1}(x_{n-1})}$.

例. 给出函数表

x	0	1	2	3	4
y	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{17}$

求连分式插值

x	$v_0(x)$	$v_1(x)$	$v_2(x)$	$v_3(x)$	$v_4(x)$
0	1				
1	$\frac{1}{2}$	-2			
2	$\frac{1}{5}$	$-\frac{5}{2}$	-2		
3	$\frac{1}{10}$	$-\frac{10}{3}$	$-\frac{3}{2}$	2	
4	$\frac{1}{17}$	$-\frac{17}{4}$	$-\frac{4}{3}$	3	1

反差商: 自变量在上方, each 断其差商

① v_0 为x对应函数值.
② v_1 为以0为参照 v_0 为参照反差商
③ v_2 为以1为参照 v_1 为参照反差商
④ 最后取对角线元素.

$$1+\cfrac{x-0}{-2+\cfrac{x-1}{-2+\cfrac{x-2}{2+\cfrac{x-3}{1}}}}=\frac{1}{1+x^2}$$ 最后化简.

③. 帕德逼近.

找有理函数 $R(n,m)$ 使
$R^{(k)}(x_0)=y_k \quad k=0,1,2\cdots$
↓
$f^{(k)}(x_0)$

x_0点 k阶导数值各相等

推导. $R(x)=\frac{p(x)}{q(x)}$ $g(x)=\varphi(x)q(x)-p(x)$

$R^{(k)}(0)=y_k$ 充要条件: $g^{(k)}(0)=0$. 定理!

定理. $p(x)=\sum_{j=0}^{n}a_jx^j$ $q(x)=\sum_{j=0}^{m}b_jx^j$ $b_0=1$.
$R(x)=\frac{p(x)}{q(x)}$. 规定 $c_j=\frac{y_j}{j!}$ 等价于.

求 $a_k-\sum_{j=0}^{k}c_jb_{k-j}=c_k$

$j>n$时 $a_j=0$ $j>m$ $b_j=0$.

在某一点处. 目前看到的是在x=0处.
即0阶, 1阶, 2阶 $g^{(k)}(0)=0$.

例. 对函数 $y=\ln(1+x)$, 取 $x_0=0$, $y_k=f^{(k)}(0)$ $k=0,1,\cdots,5$. 求 $R(2,2)$
$R(3,3)$.

1.泰勒展开求 $\varphi(x)$
$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k}\frac{x^k}{k}$
$\varphi(x)=c_1x+c_2x^2+c_3x^3+\cdots=\sum_{k=1}^{\infty}c_kx^k$ (有c_0, 为泰勒展开系数)

$c_1=1$ $c_2=-\frac{1}{2}$ $c_3=\frac{1}{3}$ $c_4=-\frac{1}{4}$ $c_5=\frac{1}{5}$ $c_6=-\frac{1}{6}$

$R_{22}(x)=\frac{a_0+a_1x+a_2x^2}{1+b_1x+b_2x^2}$ $\frac{p(x)}{q(x)}$

2. $g^{(k)}(x)=0$.
$g(x)=\varphi(x)q(x)-p(x)$
$g'(x)=\varphi'(x)q(x)+\varphi(x)q'(x)-p'(x)$
$g''(x)=\varphi''(x)q(x)+2\varphi'(x)q'(x)+\varphi(x)q''(x)-p''(x)$
$g'''(x)=\varphi'''(x)q(x)+3\varphi''(x)q'(x)+3\varphi'(x)q''(x)+\varphi(x)q'''(x)-p'''(x)$
$g(0)=0. \Rightarrow a_0=0.$
$g'(0)=0\Rightarrow c_1-a_1=0\Rightarrow a_1=c_1=1.$ (c_1已知).
$g''(0)=2(b_1c_1-a_2+c_2)=0 \Rightarrow a_2-b_1=-\frac{1}{2}.$
$g^{(3)}(0)=6(b_1c_2+b_2c_1+c_3)=0. \Rightarrow \frac{1}{2}b_1-b_2=\frac{1}{3}.$
$g^{(4)}(0)=24(b_1c_3+b_2c_2+c_4)=0 \Rightarrow \frac{1}{3}b_1-\frac{1}{2}b_2=\frac{1}{4}.$
n个未知数, 算到(n-1)阶导数.

解得 $\begin{cases}a_0=0 & a_1=1 & a_2=\frac{1}{2}\\ b_1=1 & b_2=\frac{1}{6}\end{cases}$

$\therefore R_{22}(x)=\frac{x+\frac{1}{2}x^2}{1+x+\frac{1}{6}x^2}=\frac{6x+3x^2}{6+6x+x^2}$ (最后化简)

第四章. 函数逼近

① 范数定义及计算
$\|f\|_\infty=\max_{a\le x\le b}|f(x)|$ ∞范数.
$\|f\|_1=\int_a^b|f(x)|dx$ 1范数.
$\|f\|_2=(\int_a^b f^2(x)dx)^{\frac{1}{2}}$ 2范数

② 正交多项式.
正交. $(f(x),g(x))=\int_a^b\rho(x)f(x)g(x)dx=0$. 带权正交.

递推公式. $\begin{cases}\varphi_0(x)=1\\ \varphi_1(x)=x-\alpha_1\\ \varphi_{k+1}(x)=(x-\alpha_{k+1})\varphi_k(x)-\beta_{k+1}\varphi_{k-1}(x)\end{cases}$ 正交多项式

$\alpha_{k+1}=\frac{(x\varphi_k,\varphi_k)}{(\varphi_k,\varphi_k)}$
$\beta_{k+1}=\frac{(\varphi_k,\varphi_k)}{(\varphi_{k-1},\varphi_{k-1})}$

eg. $[0,1]$ 带权 $\rho(x)=\ln\frac{1}{x}$ 前3次正交多项式 $\varphi_0,\varphi_1,\varphi_2$.

$\rho(x)=\ln\frac{1}{x}=-\ln x$.

$\varphi_0(x)=1$.

$$\alpha_1=\frac{(x\varphi_0,\varphi_0)}{(\varphi_0,\varphi_0)}=\frac{\int_0^1 -\ln x\cdot x\cdot 1\,dx}{\int_0^1 -\ln x\cdot 1\,dx}=\frac{\frac{1}{4}}{1}=\frac{1}{4}.$$

$\varphi_1(x)=x-\alpha_1=x-\frac{1}{4}$.

$$\alpha_2=\frac{(x\varphi_1,\varphi_1)}{(\varphi_1,\varphi_1)}=\frac{-\int_0^1 x(x-\frac{1}{4})^2\ln x\,dx}{-\int_0^1 \ln x\,(x-\frac{1}{4})^2dx}=\frac{13}{28}$$

$$\beta_2=\frac{(\varphi_1,\varphi_1)}{(\varphi_0,\varphi_0)}=\frac{-\int_0^1(x-\frac{1}{4})^2\ln x\,dx}{-\int_0^1\ln x\,dx}=\frac{7}{144}$$

$$\varphi_2(x)=(x-\alpha_2)\varphi_1(x)-\beta_2\varphi_0(x)$$
$$=(x-\frac{13}{28})(x-\frac{1}{4})-\frac{7}{144}\cdot 1$$
$$=x^2-\frac{5}{7}x+\frac{17}{252}$$

勒让德多项式. $\rho(x)\equiv 1$. $[-1,1]$

$P_0(x)=1$. $P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\{(x^2-1)^n\}$

有 I. 正交性 $\int_{-1}^1 P_n(x)P_m(x)dx=\begin{cases}0 & m\neq n\\ \frac{2}{2n+1} & m=n.\end{cases}$

II 奇偶性 $P_n(-x)=(-1)^n P_n(x)$

III 递推性. $(n+1)P_{n+1}(x)=(2n+1)xP_n(x)-nP_{n-1}(x)$

$P_0(x)=1$

$P_1(x)=x$

$P_2(x)=\frac{3x^2-1}{2}$

$P_3(x)=\frac{5x^3-3x}{2}$

$P_4(x)=\frac{35x^4-30x^2+3}{8}$

IV. $[-1,1]$ 有 n 个根/零点

切比雪夫多项式. $\rho(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $[-1,1]$

$T_n(x)=\cos(n\arccos x)$

若令 $x=\cos\theta$. 则 $T_n(x)=\cos n\theta$

I. 递推性

$$\begin{cases}T_{n+1}(x)=2xT_n(x)-T_{n-1}(x) & n=1,2,\cdots\\ T_0(x)=1\\ T_1(x)=x.\end{cases}$$

由 $\cos(n+1)\theta=2\cos\theta\cos n\theta-\cos(n-1)\theta$ 导出

$T_2(x)=2x^2-1$

$T_3(x)=4x^3-3x$ 首项系数 2^{n-1}

$T_4(x)=8x^4-8x^2+1$.

II. 正交性.

$$\int_{-1}^1\frac{T_n(x)T_m(x)}{\sqrt{1-x^2}}=\begin{cases}0 & n\neq m\\ \frac{\pi}{2} & n=m\neq 0\\ \pi & n=m=0\end{cases}$$

III. $T_{2k}(x)$ 只有偶次幂. $T_{2k+1}(x)$ 只有奇次幂.

IV. $T_n(x)$ 在 $[-1,1]$ 有 n 个零点,

$x_k=\cos\frac{2k+1}{2n}\pi$. $k=0,1,2\cdots$

③. 最佳一致逼近

与之前拉格朗日插值不同. $[a,b]$ 上的逼近 $f(x)$

(最佳逼近

给定 $f(x)\in C[a,b]$, 有 $P^*(x)=\mathrm{span}\{1,x,x^2,\cdots x^n\}$ 使误差.

$\|f(x)-P^*(x)\|=\min\limits_{p\in H_n}\|f(x)-P(x)\|$. 未规定范数种类

$P^*(x)$ 是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 最佳逼近多项式

若 $\mathrm{span}\{\varphi_0,\varphi_1,\cdots\varphi_n\}$ P^* 为最佳逼近函数)

取为 ∞ 范数. 最佳一致逼近多项式.

$\|f(x)-P^*(x)\|_\infty=\min\limits_{p\in H_n}\max\limits_{a\le x\le b}|f(x)-P(x)|$. 最大误差最小.

两个问题.

I. 用低一次多项式做最佳一致逼近. 求 $P(x)\in H_n$ 在 H_{n-1} 中最佳逼近

第一类切比雪夫多项式. $\tilde{T}_0(x)=1$ $\tilde{T}_n(x)=\frac{1}{2^{n-1}}T_n(x)$

有 $\max\limits_{|x|\le 1}|\tilde{T}_n(x)|\le\max\limits_{|x|\le 1}|P(x)|$ (定理1).

首项系数为1多项式中 $\tilde{T}_n(x)$ 是 $\tilde{H}_n$ 中最大值最小的多项式.

方法: 因为 -(n-1)次多项式后, 最高次系数不变.

令 $f(x)-P^*(x)=(\text{对应系数})\,T_n(x)$.

若 $[a,b]$ 区间. 令 $x=\frac{1}{2}[(b-a)t+a+b]$ 转到 $[-1,1]$.

例. $f(x)=x^4+3x^3-1$ 在 $[0,1]$ 三次最佳逼近多项式.

令 $x=\frac{t+1}{2}$ $t=2x-1$ $(t\in[-1,1])$

$f(t)=(\frac{t+1}{2})^4+3(\frac{t+1}{2})^3-1$.

有 $16[(\frac{t+1}{2})^4+3(\frac{t+1}{2})^3-1-p_3^*(\frac{t+1}{2})]=\frac{1}{2^3}T_4(t)$.

即 $p_3^*(\frac{t+1}{2})=f(\frac{t+1}{2})-\frac{1}{16\times 8}T_4(t)$.

$p_3^*(\frac{t+1}{2})=(\frac{t+1}{2})^4+3(\frac{t+1}{2})^3-1-\frac{1}{16\times 8}(8t^4-8t^2+1)$

$p_3^*(x)=x^4+3x^3-1-\frac{1}{16\times 8}[8(2x-1)^4-8(2x-1)^2+1]$

$=5x^3-\frac{5}{4}x^2+\frac{1}{4}x-\frac{129}{128}$.

变换后 化到[-1,1] 故 $T_4(t)$ $t\in[-1,1]$ 作用

II. 一般函数做最佳一致逼近 用第一类切比雪夫零点

✓ $T_n(x)$ 在[-1,1] n个零点 $x_k=\cos\frac{2k+1}{2n}\pi$. $k=0,1,\dots,n-1$.

n+1个极值点 $x_k=\cos\frac{k}{n}\pi$.

L插值 I.最佳一致逼近

II.(余项 $R_n(x)=f(x)-L_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\omega_{n+1}(x)$.) 不同插值点不同

$\max|f(x)-L_n(x)|\le\frac{\max_{-1\le x\le1}|f^{(n+1)}(x)|}{(n+1)!}\max_{-1\le x\le1}|(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)|$

$T_{n+1}(x)$零点插值有.

带进△ $\max_{-1\le x\le1}|f(x)-L_n(x)|\le\frac{1}{2^n(n+1)!}\max_{-1\le x\le1}\|f^{(n+1)}(x)\|_\infty$.

$\max|(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)|=\frac{1}{2^n}$.

一般[a,b]区间 $x_k=\frac{b-a}{2}\cos\frac{2k+1}{2(n+1)}\pi+\frac{a+b}{2}$ $k=0,1,\dots,n$.

例. e^x 在[0,1] 4次拉格朗日插值 $L_4(x)$. 估计误差.

$x_k=\frac{1}{2}(1+\cos\frac{2k+1}{10}\pi)$. $k=0,1,2,3,4$.

得 $x_0=0.97553$ $x_1=0.79390$ $x_2=0.5$

$x_3=0.20611$ $x_4=0.02447$

$L_4(x)=1.00000274+0.99886(2)x+0.50988x^2+0.14184x^3+0.06849x^4$.

误差估计. $\max_{0\le x\le1}|e^x-L_4(x)|\le\frac{e^1}{5!}\|\frac{1}{2}(t-t_0)\frac{1}{2}(t-t_1)$

$\frac{1}{2}(t-t_2)\frac{1}{2}(t-t_3)\frac{1}{2}(t-t_4)\|$

$=\frac{e}{5!}\frac{1}{2^{5+4}}$

对于[-1,1] $\|T_n(x)\|=\frac{1}{2^{n-1}}$

区间变换后 $x=\frac{(b-a)t}{2}+\frac{a+b}{2}$

$x_{k(t)}=\cos\frac{2k+1}{2n}\pi$

$x_k=\frac{b-a}{2}\cos\frac{2k+1}{2n}\pi+\frac{a+b}{2}$

误差估计实质上

$\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$ $|(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)|$ 各自取最大

而若[-1,1]时.

$\frac{b-a}{2}t+\frac{a+b}{2}-\frac{b-a}{2}\cos\frac{2k+1}{2n}\pi+\frac{a+b}{2}$ 各点

$=\frac{b-a}{2}(t-\cos\frac{2k+1}{2n}\pi)$ (-1,1)-(-1,1)零点.

转换为 $(\frac{b-a}{2})^{n+1}\cdot(T_{n+1})=(\frac{b-a}{2})^{n+1}\cdot\frac{1}{2^n}$

注意此处 [-1,1]上1.

四. 最佳平方逼近. 取2-范数 $(\int_a^b f(x)dx)^{\frac{1}{2}}$.

使 $\|f(x)-S^*(x)\|_2^2=\min_{S(x)\in\Phi}\|f(x)-S(x)\|_2^2$

$=\min_{S(x)\in\Phi}\int_a^b\rho(x)[f(x)-S(x)]^2dx$.

$I(a_0,a_1,\dots,a_n)=\int_a^b\rho(x)[\sum_{j=0}^n a_j\varphi_j(x)-f(x)]^2dx$.

$\frac{\partial I}{\partial a_i}=0$. $(i=0,1,2,\dots,n)$. 得

$\sum_{j=0}^n(\varphi_k,\varphi_j(x))a_j=(f(x),\varphi_k(x))$ $k=0,1,\dots,n$.

$\sum_{j=0}^n(\varphi_k,\varphi_j)a_j=(\varphi_k,f)$ 方程

$$\begin{bmatrix}(\varphi_0,\varphi_0)&(\varphi_0,\varphi_1)&\cdots&(\varphi_0,\varphi_n)\\(\varphi_1,\varphi_0)&(\varphi_1,\varphi_1)&\cdots&(\varphi_1,\varphi_n)\\\vdots&&&\vdots\\(\varphi_n,\varphi_0)&(\varphi_n,\varphi_1)&\cdots&(\varphi_n,\varphi_n)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_0\\a_1\\\vdots\\a_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(\varphi_0,f)\\(\varphi_1,f)\\\vdots\\(\varphi_n,f)\end{bmatrix}$$

$S^*(x)=a_0^*\varphi_0(x)+a_1^*\varphi_1(x)+\cdots+a_n^*\varphi_n(x)$

无论区间.

余项 $\delta(x)=f(x)-S^*(x)$. 平方误差.

$\|\delta(x)\|_2^2=(f(x)-S^*(x),f(x)-S^*(x))$.

$=\|f(x)\|_2^2-\sum_{k=0}^n a_k^*(\varphi_k(x),f(x))$

令 $\varphi_k(x)=x^k$ $\rho(x)=1$. 最佳平方逼近多项式. [0,1]

H矩阵 $=\begin{bmatrix}1&\frac{1}{2}&\cdots&\frac{1}{n+1}\\\frac{1}{2}&\frac{1}{3}&\cdots&\frac{1}{n+2}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\\frac{1}{n+1}&\frac{1}{n+2}&\cdots&\frac{1}{2n+1}\end{bmatrix}$ $Ha=d$.

~~用正交多~~

1. Givens.

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & \cos\theta & & -\sin\theta & \\ & & 1 & & \\ & \sin\theta & & \cos\theta & \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$$

① 雅克比法 R^TAR 每消两个一个无效

① $b=\frac{a_{pp}-a_{qq}}{2a_{pq}}$

② $t=sgn(b)\frac{1}{(|b|+\sqrt{1+b^2})}$

③ $\cos\theta=(1+t^2)^{-\frac{1}{2}}$

④ $\sin\theta=t\cos\theta$. 得R.

R^TAR → 对角取特征值

特征向量 $V=R_1R_2\cdots R_n$.

$R^TA=L$.

② QL方法. $Q^TA=L$. 从 $R(n-1,n)$ 开始 消三对角. 乘一次消一个.

① $c_i=\frac{d_i}{\sqrt{d_i^2+e_{i-1}^2}}$ $s_i=-\frac{e_{i-1}}{\sqrt{d_i^2+e_{i-1}^2}}$ ($R(n-1,n)$ 用).

② 写出 $R\to R^T\to R^TA_1=A_2$. 得L.

③ $Q=R(n-1,n)R(n-2,n-1)\cdots R(1,2)$. 得Q.

一落半发点不行

③ Householder. $H\cdot A\cdot H$

① 取向量 除对角线下整一列 (n-1)个元素

② $\sigma=sgn(x)\|x\|_2$. (取n-1个元素,第一个符号x选数)

③ $u=x+\sigma\cdot e$.

④ $\beta=\frac{1}{2}\|u\|_2^2$.

⑤ $H=I-\beta^{-1}uu^T$

⑥ 与 $\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & \square\end{bmatrix}$ 并 得H.

⑦ HAH 消一个元素.

⑧ 取最大维度

2. 样条函数. $\sum_{j=0}^{k}a_jx^j+\sum_{j=1}^{N-1}(x-x_j)_+^k$. 有加号. 从 $(x-x_1)$ 开始. k次.

给值 节点

3. 连分式 ① 辗转相除 $R_{nm}(x)=\frac{n次}{m次}$

保留最大系数, 次数小1时除下去, 分数化整数.

② 有理插值. 倒差商

X	$V_0(x)$	$V_1(x)$	$V_2(x)$	$V_3(x)$	$V_4(x)$
0	1	-2			
1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{5}{2}$	-2		
2	$\frac{1}{5}$	$-\frac{10}{3}$	$-\frac{3}{2}$	2	
3	$\frac{1}{10}$	$-\frac{17}{3}$	$-\frac{2}{3}$		
4	$\frac{1}{17}$	$-\frac{17}{4}$	$-\frac{5}{3}$	3	1.

$x_0,x_1,x_2\cdots$

$y_0,y_1,y_2\cdots$ 即 V_0,V_1,V_2,V_3.

$V_1(x_1)=\frac{x_1-x_0}{V_1-V_0(x_0)}$ $V_1(x_2)=\frac{x_2-x_0}{V_2-V_0}$ $V_1(x_3)=\frac{x_3-x_0}{V_3-V_0}$

区间 $[a,b]$. $x=\frac{(b-a)}{2}t+\frac{a+b}{2}$. n次拉格朗日

零点 $\frac{b-a}{2}\cos\frac{2k+1}{2(n+1)}\pi+\frac{a+b}{2}$. $T_{n+1}(x)$零点.

得x值, 代入y值, 进行拉格朗日插值.

误差估计: $R_n=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$.

$\max|R_n|=\frac{\max|f^{(n+1)}(\xi)|}{(n+1)!}\cdot\max|(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)|$.

$\left(\frac{b-a}{2}t+\frac{a+b}{2}-\frac{b-a}{2}\cos\frac{2k+1}{2n}\pi-\frac{a+b}{2}\right)\cdots$

$\left(\frac{b-a}{2}\right)^{n+1}\cdot\max|T_{n+1}(t)|\rightarrow\left(\frac{1}{2^n}\right)$ 相乘.

首项系数化为1.

而 $\tilde{T}_n(x)=\frac{1}{2^{n-1}}T_n(x)$ (首项系数为1)

$\max\limits_{-1\le x\le 1}|\tilde{T}_{n+1}(x)|=\frac{1}{2^n}$

最佳平方逼近: 2-范数最小.

$\sum\limits_{j=0}^{n}a_j\varphi_j(x)$.

$$\begin{bmatrix}(\varphi_0,\varphi_0) & (\varphi_0,\varphi_1) & \cdots & (\varphi_0,\varphi_n)\\ (\varphi_1,\varphi_0) & (\varphi_1,\varphi_1) & & (\varphi_1,\varphi_n)\\ \vdots & & & \\ (\varphi_n,\varphi_0) & (\varphi_n,\varphi_1) & \cdots & (\varphi_n,\varphi_n)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_0\\ a_1\\ \vdots\\ a_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(\varphi_0,f)\\ (\varphi_1,f)\\ \vdots\\ (\varphi_n,f)\end{bmatrix}.$$

余项. $\delta^2=\|f(x)\|_2^2-\sum\limits_{k=0}^{n}a_k^*(\varphi_k(x),f(x))$.