弹性力学习题课

制作人：jcy1998

目录

1.1弹性力学基本方程（直角坐标）

在空间问题中，应力、形变和位移等基本知函数共有15个，且均为*x, y, z*的函数。

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \sigma_x}{\partial x}+\dfrac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}+\dfrac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}+f_x=0 \\ \dfrac{\partial \sigma_y}{\partial y}+\dfrac{\partial \tau_{zy}}{\partial z}+\dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}+f_y=0 \\ \dfrac{\partial \sigma_z}{\partial z}+\dfrac{\partial \tau_{xz}}{\partial x}+\dfrac{\partial \tau_{yz}}{\partial y}+f_z=0 \end{cases}$$

平衡方程：3个，是联系体力和应力的方程

$$\begin{cases} \varepsilon_x=\dfrac{1}{E}\left[\sigma_x-\nu\left(\sigma_y+\sigma_z\right)\right]=\dfrac{1+\nu}{E}\sigma_x-\dfrac{\nu}{E}\Theta \\ \varepsilon_y=\dfrac{1}{E}\left[\sigma_y-\nu\left(\sigma_z+\sigma_x\right)\right]=\dfrac{1+\nu}{E}\sigma_y-\dfrac{\nu}{E}\Theta \\ \varepsilon_z=\dfrac{1}{E}\left[\sigma_z-\nu\left(\sigma_x+\sigma_y\right)\right]=\dfrac{1+\nu}{E}\sigma_z-\dfrac{\nu}{E}\Theta \\ \gamma_{xy}=\dfrac{1}{G}\tau_{xy} \\ \gamma_{yz}=\dfrac{1}{G}\tau_{yz} \\ \gamma_{xz}=\dfrac{1}{G}\tau_{xz} \end{cases}$$

物理方程：6个，是联系应力和应变的方程，与材料性质有关（E，μ等相关）

$$\begin{cases} \varepsilon_x=\dfrac{\partial u}{\partial x},\varepsilon_y=\dfrac{\partial v}{\partial y},\varepsilon_x=\dfrac{\partial w}{\partial z} \\ \varepsilon_{xy}=\varepsilon_{yx}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u}{\partial y}+\dfrac{\partial v}{\partial x}\right),\varepsilon_{yz}=\varepsilon_{zy}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v}{\partial z}+\dfrac{\partial w}{\partial y}\right),\varepsilon_{xz}=\varepsilon_{zx}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u}{\partial z}+\dfrac{\partial w}{\partial x}\right) \end{cases}$$

几何方程：6个，是联系位移和应变的方程

各个物理量之间的关系

$$\text{体力}\xleftrightarrow{\text{平衡方程}}\text{应力}\xleftrightarrow{\text{物理方程}}\text{应变}\xleftrightarrow{\text{几何方程}}\text{位移}$$

1. 1弹性力学基本方程（平面极坐标）

- 平衡微分方程

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta}+\frac{\sigma_r-\sigma_\theta}{r}+F_r=0$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta}+\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r}+\frac{2\tau_{r\theta}}{r}+F_\theta=0$$

- 几何方程

$$\varepsilon_r=\frac{\partial u_r}{\partial r}$$

$$\varepsilon_\theta=\frac{u_r}{r}+\frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}$$

$$\gamma_{r\theta}=\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta}+\frac{\partial u_\theta}{\partial r}-\frac{u_\theta}{r}$$

■ 物理方程

$$\sigma_r=\frac{E'}{1-\nu'^2}(\varepsilon_r+\nu'\varepsilon_\theta)$$

$$\sigma_\theta=\frac{E'}{1-\nu'^2}(\varepsilon_\theta+\nu'\varepsilon_r)$$

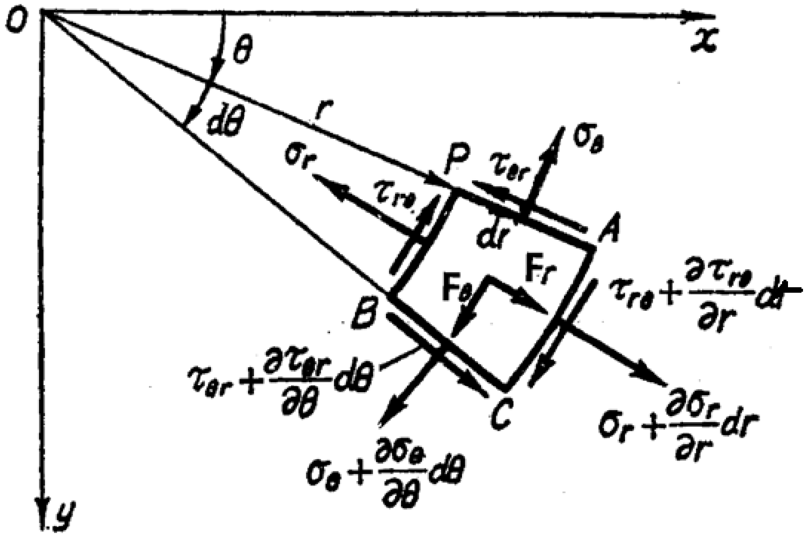
$$\tau_{r\theta}=\frac{E'}{2(1+\nu')}\gamma_{r\theta}$$

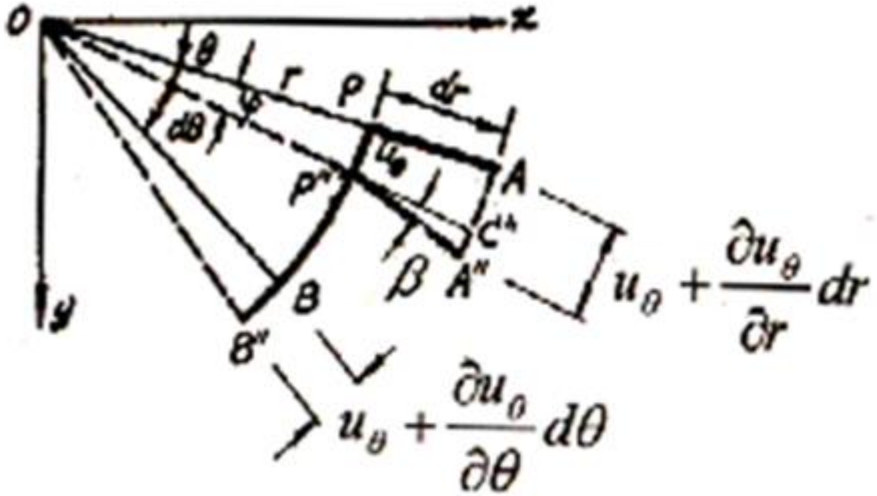
■ 边界条件

$$T_r=\sigma_r l+\tau_{r\theta}m=\bar{T}_r$$

$$T_\theta=\tau_{\theta r}l+\sigma_\theta m=\bar{T}_\theta$$

$$u_r=\bar{u}_r \quad u_\theta=\bar{u}_\theta$$





- **应力函数的相容方程**

$$\nabla^2\varphi=(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2})^2\varphi=(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2})^2\varphi=0$$

需要注意的是，这里φ前的算子要两次分别计算，不能当成多项式平方展开后再分别作用到φ，否则结果不正确！

- **应力函数与应力的关系**

$$\sigma_r=\sigma_{r'}=(\sigma_{x'})_{\theta'=0}=(\frac{\partial^2\varphi}{\partial y'^2})_{\theta=0}=\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2}$$

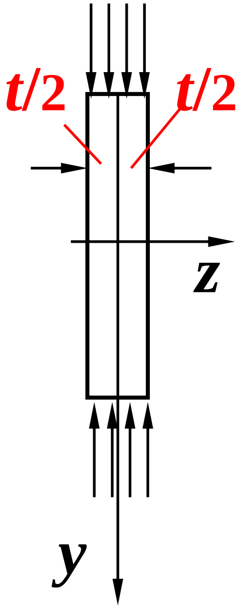
$$\sigma_\theta=\sigma_{\theta'}=(\sigma_{y'})_{\theta'=0}=(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x'^2})_{\theta=0}=\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}$$

$$\tau_{r\theta}=\tau_{r'\theta'}=(\tau_{x'y'})_{\theta'=0}=(-\frac{\partial^2\varphi}{\partial x'\partial y'})_{\theta=0}=-\frac{\partial}{\partial r}(\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta})$$

1. 2平面问题问题的分类

平面应力问题

$$\sigma_z = 0, \quad \varepsilon_z = f(\sigma_x, \sigma_y), \quad \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \quad \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$$



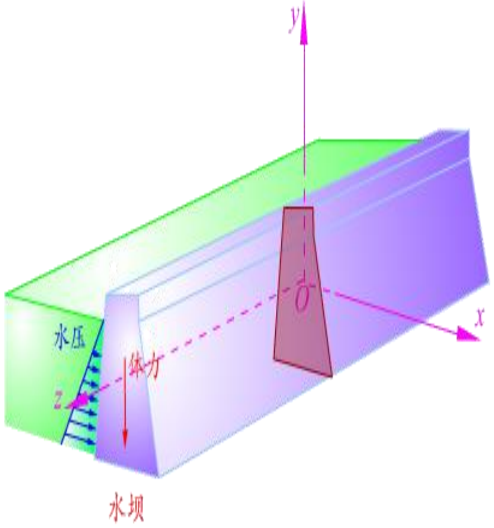
1. 等厚度的薄板
2. 体力作用于体内，平行于板的中面，沿板厚不变
3. 面力作用于板边，平行于板的中面，沿板厚不变
4. 约束作用于板边，平行于板的中面，沿板厚不变。

z向很小，与其他两个方向相比可以忽略不计，因而转化为平面问题，且在z方向无应力，但是因为无约束，所有有应变（物理方程可得）

从平面应力转化为平面应变：$E \rightarrow \dfrac{E}{1-\mu^2}$ | $\mu \rightarrow \dfrac{\mu}{1-\mu}$

平面应变问题

$$\sigma_z = f(\sigma_x, \sigma_y), \quad \varepsilon_z = 0, \quad \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \quad \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$$



1. 很长的常截面柱体
2. 体力作用于体内，平行于横截面，沿柱体长度方向不变
3. 面力作用于柱面，平行于横截面，沿柱体长度方向不变
4. 约束作用于柱面，平行于横截面，沿柱体长度方向不变。

z向很长，可以认为任意$z = z_0$面都是对称面，全部一样，因而转化为平面问题，且在z方向上无应变，但是由于两端的约束，z方向有应力

从平面应变转化为平面应力：$E \rightarrow \dfrac{E(1+2\mu)}{(1+\mu)^2}$ | $\mu \rightarrow \dfrac{\mu}{1+\mu}$

1. 3 平面问题的两条求解途径（单连体）

推导路径：体力 $\xleftrightarrow{\text{平衡方程}}$ 应力 $\xleftrightarrow{\text{物理方程}}$ 应变 $\xleftrightarrow{\text{几何方程}}$ 位移

位移法（以位移为基本未知量）

位移分量需要满足的条件：

1.位移表示的平衡微分方程

2.位移表示的应力边界条件

3.位移边界条件

边界条件

1.
$$\boxed{\begin{aligned}&\frac{E}{1-\mu^2}(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{1-\mu}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{1+\mu}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y})+f_x=0\\ &\frac{E}{1-\mu^2}(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{1-\mu}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{1+\mu}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y})+f_y=0\end{aligned}}$$

2.
$$\boxed{\begin{aligned}&\frac{E}{1-\mu^2}[l(\frac{\partial u}{\partial x}+\mu\frac{\partial v}{\partial y})+m\frac{1-\mu}{2}(\frac{\partial u}{\partial y}+\mu\frac{\partial v}{\partial x})]=\bar{f}_x\\ &\frac{E}{1-\mu^2}[m(\frac{\partial v}{\partial y}+\mu\frac{\partial u}{\partial x})+l\frac{1-\mu}{2}(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y})]=\bar{f}_y\end{aligned}}$$

3.
$$\boxed{\begin{aligned}&(u)_s=\bar{u}(s)\\ &(v)_s=\bar{v}(s)\end{aligned}}$$

应力法（以应力为基本未知量）

应力分量需要满足的条件：

1.平衡微分方程

2.应力表示的相容方程

3.边界条件

1.
$$\boxed{\begin{aligned}&\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}+f_x=0\\ &\frac{\partial\sigma_{yy}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+f_y=0\end{aligned}}$$

2.
$$\boxed{(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2})(\sigma_{xx}+\sigma_{yy})=-(1+\mu)(\frac{\partial f_x}{\partial x}+\frac{\partial f_y}{\partial y})}$$

3.
$$\boxed{\begin{aligned}&(l\sigma_{xx}+m\tau_{xy})_s=\bar{f}_x(s)\\ &(m\sigma_{yy}+l\tau_{yx})_s=\bar{f}_y(s)\end{aligned}}\qquad\boxed{\begin{aligned}&(u)_s=\bar{u}(s)\\ &(v)_s=\bar{v}(s)\end{aligned}}$$

方程形式均以平面应力问题为例说明

1.3 平面问题的两条求解途径（单连体）

位移边界条件：

在位移约束S_u面上：

$$\left\| \begin{aligned} (u)_s &= \bar{u}(s) \\ (v)_s &= \bar{v}(s) \end{aligned} \right.$$

应力边界条件：

在应力约束 S_σ面上：

设 S_σ面法线与x轴正向夹角的余玄为l，与y轴正向夹角的余玄为m。

$$\left\| \begin{aligned} (l\sigma_{xx} + m\tau_{xy})_s &= \bar{f}_x(s) \\ (m\sigma_{yy} + l\tau_{yx})_s &= \bar{f}_y(s) \end{aligned} \right.$$

混合条件：

位移约束与应力约束的组合。

边界条件补充说明：

应力边界条件实质是边界点上微元体的平衡条件。

位移边界条件实质是变形连续条件在约束边界上的体现。

这样理解易于写边界条件：想象在边界处应力的正方向，应力分量在该处应该与外力一致，否则边界面上不能平衡。

相容方程说明：

1.相容方程是连续体位移连续性的必然结果。
2.相容方程是应变所对应位移存在且连续的必要条件。
3.相容方程是基于十五个基本方程推导出来，是将几何方程处理后消去位移，得到应变表示的相容方程。进一步通过物理方程将应力替换掉应变，得到应力形式的相容方程

应变表示的相容方程

$$\boxed{\frac{\partial^2 \epsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_{yy}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}}$$

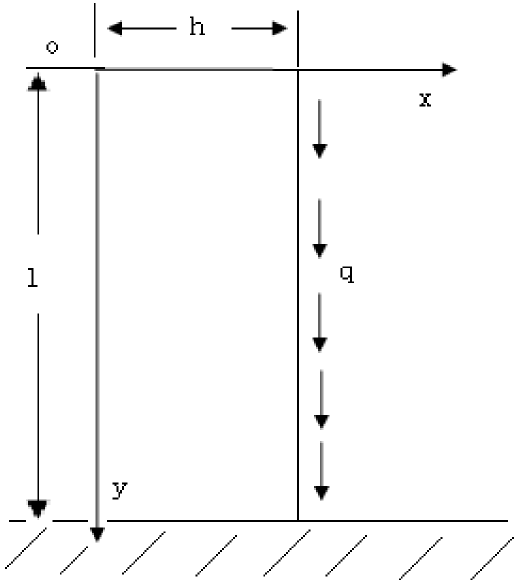
常体力平面应力问题的应力表示的相容方程

$$\boxed{\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) = -(1+\mu)\left(\frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y}\right)}$$

1. 3 平面问题的两条求解途径（单连体）

圣维南原理

次要边界上应力条件不能逐点满足，用等效面力（力矩）替换（积分满足）！

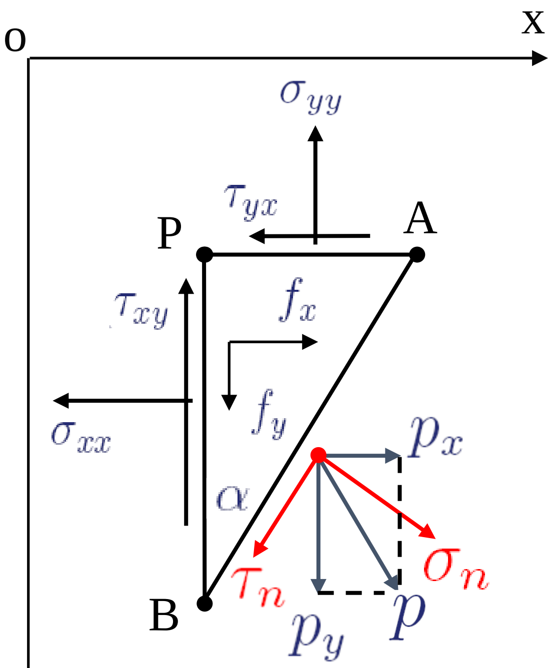


$$\int_{-h/2}^{h/2}(\sigma_x)_{x=\pm l}\,dy\cdot 1=\pm\int_{-h/2}^{h/2}\overline{f}_x(y)dy\cdot 1(=F_N)$$

$$\int_{-h/2}^{h/2}(\sigma_x)_{x=\pm l}\,dy\cdot 1\cdot y=\pm\int_{-h/2}^{h/2}\overline{f}_x(y)dy\cdot 1\cdot y(=M)$$

$$\int_{-h/2}^{h/2}(\tau_{xy})_{x=\pm l}\,dy\cdot 1=\pm\int_{-h/2}^{h/2}\overline{f}_y(y)dy\cdot 1(=F_S)$$

1. 4 平面问题中一点的应力状态



$$\cos(n,x)=l$$
$$\cos(n,y)=m$$

按坐标轴方向分解

$$p_x=l\sigma_{xx}+m\tau_{xy}$$
$$p_y=m\sigma_{yy}+l\tau_{xy}$$

按正应力切应力方向分解

$$\sigma_n=lp_x+mp_y$$
$$=l^2\sigma_{xx}+m^2\sigma_{yy}+2lm\tau_{xy}$$
$$\tau_n=lm(\sigma_{yy}-\sigma_{xx})+(l^2-m^2)\tau_{xy}$$

是一个点确定的应力状态，在不同角度斜截面上分解。

之所以p_x和p_y随着斜截面角度发生变化，实际上是因为AB边的长度随斜截面角度变化而变化（p_x、p_y、σ_n、τ_n是应力，需要乘以长度才是可以用于计算平衡的力）

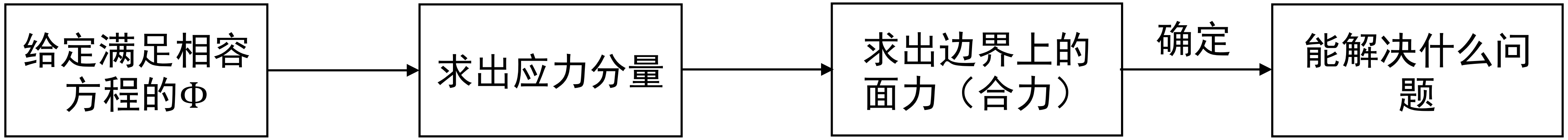
在应力主面上，全应力等于主应力，因此：

$$\boxed{\sigma_{1,2}=\frac{\sigma_{xx}+\sigma_{yy}}{2}\pm\sqrt{\frac{(\sigma_{xx}-\sigma_{yy})^2}{2}+\tau_{xy}^2}}$$

这个值对于一个应力状态确定的点来说是固定的，不会随斜截面方向改变而发生变化，因为针对的就是主平面而言，反映的是一种不变量，容易混淆。

1. 5 使用应力函数的逆解法和半逆解法的基本步骤

逆解法



给定满足相容方程的Φ

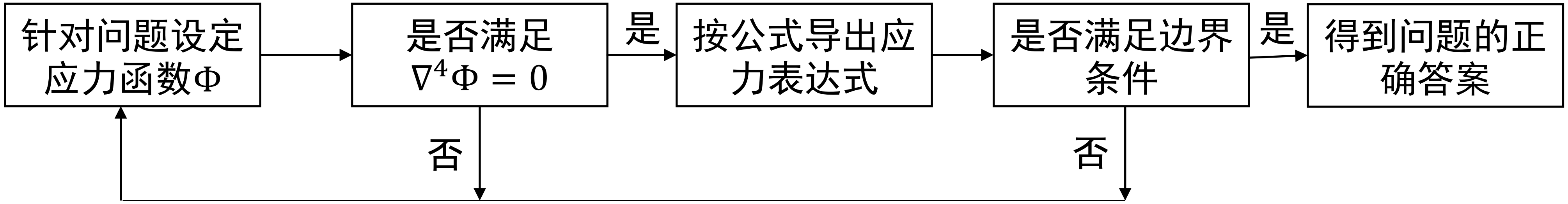
求出应力分量

求出边界上的面力（合力）

确定

能解决什么问题

半逆解法



针对问题设定应力函数Φ

是否满足 $\nabla^4\Phi = 0$

是

按公式导出应力表达式

是否满足边界条件

是

得到问题的正确答案

否

否

常用的假设应力分量函数形式的方法：

1. 由主要边界受力情况提出假设
2. 由材料力学解答提出假设
3. 由量纲分析方法提出假设

2. 直角坐标应力函数例题

- **矩形截面的柱厚度为单位值1，宽度远小于高度($h<<l$)，在一边侧面上受均布剪力 q 作用（如下图所示），试求柱中的应力分量（不考虑体力）。**

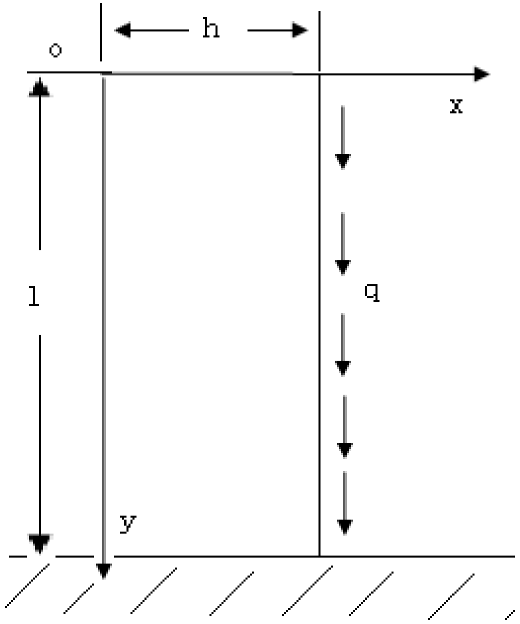
解：采用半逆解法。设 $\sigma_x=0$，导出 ϕ，并使其满足双调和方程。

不考虑体力时，有 $\sigma_x=\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}=0$，可得 $\phi=yf(x)+f_1(x)$，

则 $\frac{\partial^4\phi}{\partial y^4}=0$，$\frac{\partial^4\phi}{\partial x^2\partial y^2}=0$。

由双调和方程 $\nabla^4\phi=0$，得 $\frac{\partial^4\phi}{\partial x^4}=yf^{(4)}(x)+f_1^{(4)}(x)=0$。

由 y 的任意性，故 $f^{(4)}(x)=f_1^{(4)}(x)=0$



即 $f(x)$ 和 $f_1(x)$ 均为 x 的至多三次函数。

设 $f(x)=Ax^3+Bx^2+Cx+D$， $f_1(x)=A_1x^3+B_1x^2+C_1x+D_1$。

于是有
$$\begin{cases} \sigma_x=0 \\ \sigma_y=\dfrac{\partial^2\phi}{\partial x^2}=yf''(x)+f_1''(x)=y(6Ax+2B)+(6A_1x+2B_1) \\ \tau_{xy}=-\dfrac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y}=-f'(x)=-(3Ax^2+2Bx+C) \end{cases}$$

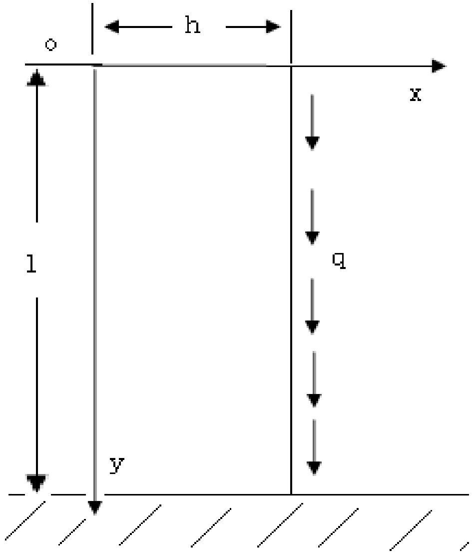
利用边界条件确定常数，并求出应力解答：

$x=0$ 时：$(\sigma_x)_{x=0}=0$（自然满足）；

$(\tau_{xy})_{x=0}=-C=0$，得 $C=0$。

$x=h$ 时：$(\sigma_x)_{x=h}=0$（自然满足）；

$(\tau_{xy})_{x=h}=-(3Ah^2+2Bh+C)=-(3Ah^2+2Bh)=q$。



$y=0$ 时：$\left(\sigma_y\right)_{y=0}=6A_1x+2B_1=0$，得 $A_1=B_1=0$；

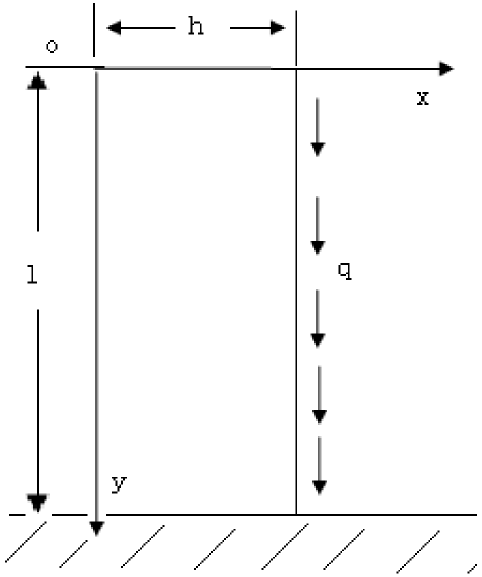
$\left(\tau_{xy}\right)_{y=0}=-(3Ax^2+2Bx)=0$ 不能精确满足，只能近似满足，故有

$\int_0^h\left(\tau_{xy}\right)_{y=0}dy=0$，即 $\int_0^h-(3Ax^2+2Bx)dy=-Ah^3-Bh^2=0$。

解得 $A=-{q}/{h^2}$，$B={q}/{h}$。

故应力分量为

$$\begin{cases}\sigma_x=0\\ \sigma_y==\dfrac{2qy}{h^2}(h-3x)\\ \tau_{xy}=\dfrac{q}{h^2}(3x^2-2hx)\end{cases}$$



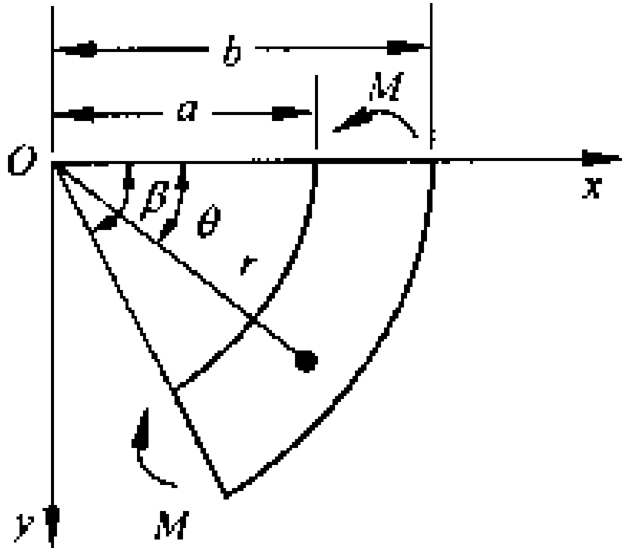
3. 极坐标习题

- 考虑下图所示单位宽度的矩形截面梁，其两端受弯矩M作用，因曲梁的几何形状和载荷都与θ无关，故可看作是轴对称问题，其通解为

$$\sigma_r=\frac{A}{r^2}+B\left(1+2\ln r\right)+2C$$

$$\sigma_\theta=-\frac{A}{r^2}+B\left(3+2\ln r\right)+2C \quad ,$$

$$\tau_{r\theta}=0$$



试根据边界条件确定应力分布规律。

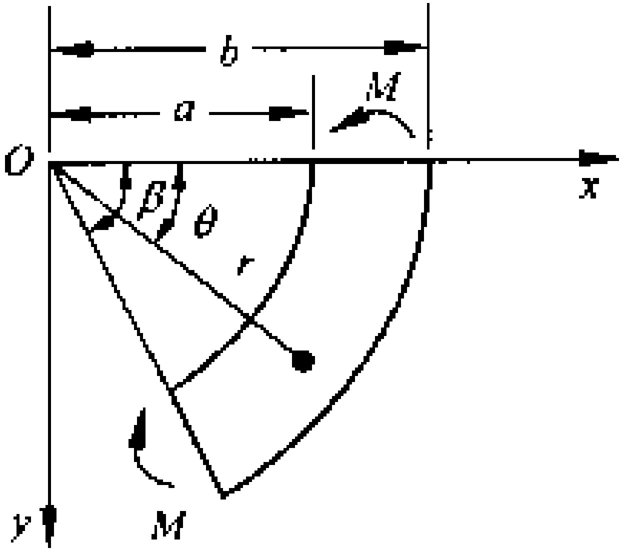
解：两个环向边界上的力边界条件是：$\sigma_r\big|_{r=a}=0;\quad \sigma_r\big|_{r=b}=0$

可得：

$$\frac{A}{a^2}+B(1+2\ln a)+2C=0$$

$$\frac{A}{b^2}+B(1+2\ln b)+2C=0$$

曲梁两端的放松边界条件是：
$$\int_a^b \sigma_\theta dr=0 \quad (1)$$
$$\int_a^b \sigma_\theta r dr=M \quad (2)$$



由（1）式得：

$$r\left[\frac{A}{r^2}+B(1+2\ln r)+2C\right]\Bigg|_a^b=0$$

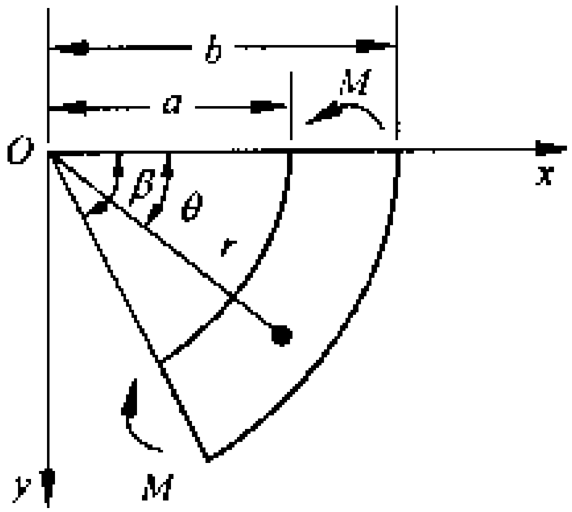
$$\frac{A}{b}+Bb(1+2\ln b)+2bC-\frac{A}{a}-Ba(1+2\ln a)-2aC=0$$

显然在$\sigma_r\big|_{r=a}=0;\quad \sigma_r\big|_{r=b}=0$条件满足下，自然满足。

由（2）式得：

$$\left[-A\ln r+b(r^2\ln r+r^2)+Cr^2\right]\Big|_a^b=M$$

$$-A\ln\frac{b}{a}+B\left[\left(b^2-a^2\right)+\left(b^2\ln b-a^2\ln a\right)\right]+C\left(b^2-a^2\right)=M$$



最终解得：

$$A=\frac{4Ma^2b^2}{N}\ln\frac{b}{a};B=\frac{2M}{N}(b^2-a^2)$$

$$C=-\frac{M}{N}[(b^2-a^2)+2(b^2\ln b-a^2\ln a)]$$

$$N=(b^2-a^2)^2-4a^2b^2\left(\ln\frac{b}{a}\right)^2$$

得到应力分量为：

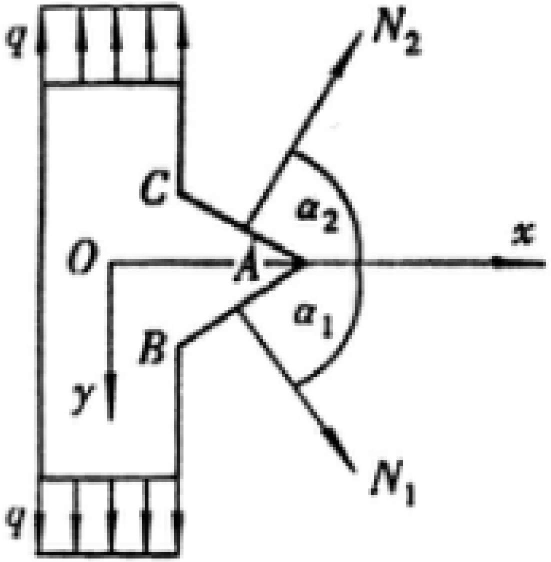
$$\sigma_r=\frac{4M}{N}\left(\frac{a^2b^2}{r^2}\ln\frac{b}{a}+b^2\ln\frac{r}{b}+a^2\ln\frac{a}{r}\right)$$

$$\sigma_\theta=\frac{4M}{N}\left(-\frac{a^2b^2}{r^2}\ln\frac{b}{a}+b^2\ln\frac{r}{b}+a^2\ln\frac{a}{r}+b^2-a^2\right)$$

$$\tau_{r\theta}=0$$

4. 边界条件习题

如图所示的薄板条在y方向上受均布拉力q的作用，体力不计。试证明在板中间某突出部分的尖端A点处的应力为零。



在 AC、AB 边界上无面力作用。即 $\overline{f}_x=\overline{f}_y=0$

AB 边界：$l_1=\cos\alpha_1, m=\sin\alpha_1$

由应力边界条件公式，有 $$\begin{aligned} l(\sigma_x)_s+m(\tau_{xy})_s&=\overline{f}_x \\ m(\sigma_y)_s+l(\tau_{xy})_s&=\overline{f}_y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos\alpha_1\sigma_x+\sin\alpha_1\tau_{xy}&=0 \\ \sin\alpha_1\sigma_y+\cos\alpha_1\tau_{xy}&=0 \end{aligned} \qquad (1)$$

AC 边界：$$\begin{aligned} l_2&=\cos\alpha_2 \\ m_2&=-\sin\alpha_2 \end{aligned}$$

代入应力边界条件公式，有 $$\begin{aligned} \cos\alpha_2\sigma_x-\sin\alpha_2\tau_{xy}&=0 \\ -\sin\alpha_2\sigma_y+\cos\alpha_2\tau_{xy}&=0 \end{aligned} \qquad (2)$$

∵A 点同处于 AB 和 AC 的边界，∴满足式（1）和（2），解得

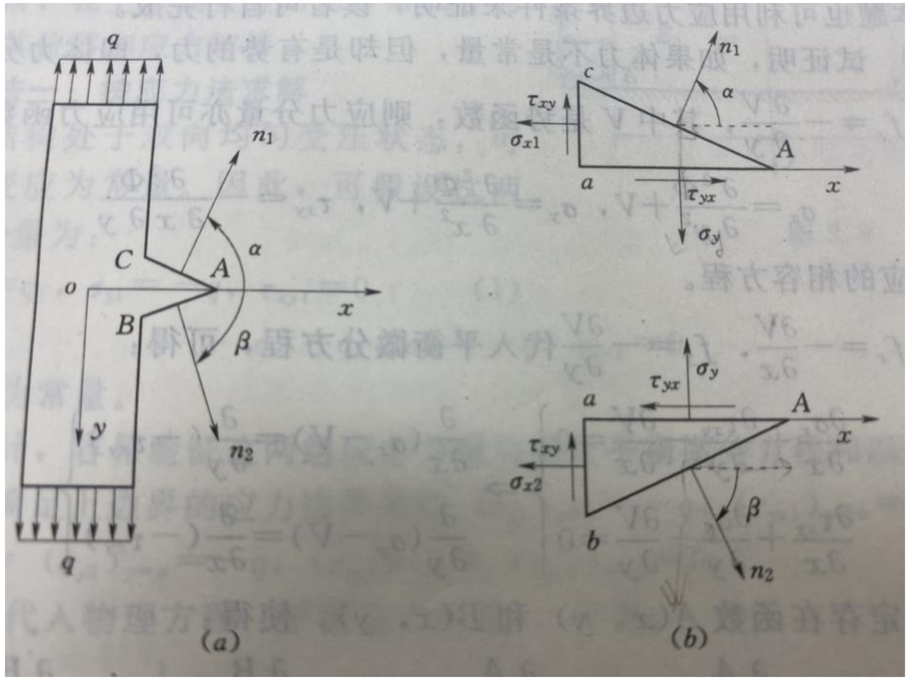
$$\sigma_x=\sigma_y=\tau_{xy}=0$$

∴ A 点处无应力作用

作业题三

- 过A点取两个微元Aac和Aab，如图所示。由于两个三角形微元体的斜边Ac（外法线$n1$）和Ab（外法线$n2$）上无面力作用，即 $\overline{f}_x = 0, \overline{f}_y = 0$

由平衡条件可知



Aac微元体

$$\sigma_{x1}\cos\alpha - \tau_{xy}\sin\alpha = 0$$

$$\tau_{xy}\cos\alpha - \sigma_y\sin\alpha = 0$$

Aab微元体

$$\sigma_{x2}\cos\beta + \tau_{xy}\sin\beta = 0$$

$$\tau_{xy}\cos\beta + \sigma_y\sin\beta = 0$$

上两式中，已考虑了斜面中点矩的平衡条件，即 $\tau_{xy} = \tau_{yx}$

- 应力分量的系数行列式为

$$\begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ 0 & \sin\beta & 0 & \cos\beta \\ 0 & \cos\beta & \sin\beta & 0 \end{vmatrix} = -\cos\alpha\cos\beta\sin\left(\alpha+\beta\right)$$

又因为

$$0<\alpha\le\frac{\pi}{2}, 0<\beta\le\frac{\pi}{2} \quad \alpha\text{和}\beta\text{不能同时为}\frac{\pi}{2}$$

当 $\alpha=\frac{\pi}{2}, 0<\beta<\frac{\pi}{2} \qquad \tau_{xy}=0, \sigma_x=\sigma_{x2}=0, \sigma_y=0$

当 $\beta=\frac{\pi}{2}, 0<\alpha<\frac{\pi}{2} \qquad \tau_{xy}=0, \sigma_x=\sigma_{x1}=0, \sigma_y=0$

当 $\alpha \neq \frac{\pi}{2}, \beta \neq \frac{\pi}{2}$ 行列式不为零。因此，必有

$$\sigma_x = \sigma_{x1} = \sigma_{x2}, \sigma_y = 0, \tau_{xy} = 0$$

综上所述，A点的应力分量为:

$$\sigma_x = 0, \sigma_y = 0, \tau_{xy} = 0$$